Задания дистанционой командной олимпиады учителей математики
2018/2019 учебный год

I. Решите задачи

№ 1. Докажите, что для любых целых чисел a и b число $a^4 + b^4 + (a + b)^4$ является чётным. **(3 балла)**

№ 2. Рассматривается последовательность чисел 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, …. Какое число находится на 2018-м месте? **(3 балла)**

№ 3. Найдите угол KNL выпуклого четырёхугольника $KMNL$, если биссектриса угла M проходит через середину стороны KL, а угол N равен сумме углов K и L. **(4 балла)**

№ 4. Одиннадцатиклассница Маша готовится к ЕГЭ по математике и каждый выходной решает задачи. В это воскресенье каждый час число решенных задач снижалось на некоторое постоянное число процентов. Через 3 часа оказалось, что она решила 265,44% того, что решила за первый час. На сколько процентов в час снижалось количество решённых задач? **(4 балла)**

№ 5. Решите уравнение: $\sqrt{(2x-1)(x+2)} - 3\sqrt{x+2} = 4 - \sqrt{(2x-1)(x+6)} + 3\sqrt{x+6}$.

(5 баллов)

№ 6. Будем называть четырёхзначное число *супер счастливым*, если в его десятичной записи сумма первых двух цифр равна сумме последних двух цифр, и это число представимо в виде суммы двух четырёхзначных палиндромов. Сколько существует супер счастливых чисел? **(5 баллов)**

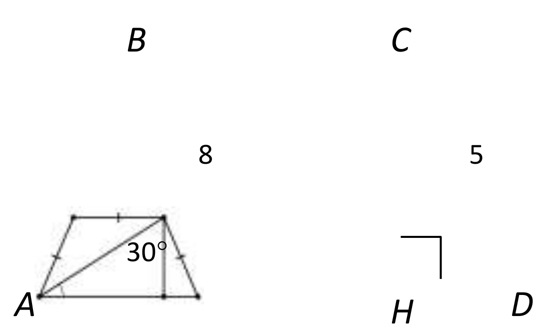
№ 7. На доске написано число 2018. Шестиклассники Ира и Саша играют в такую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Ира. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? **(4 балла)**

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

№ 8. ***Задача.*** Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание, имеющее длину 5 см, равно боковой стороне, а диагональ, равная 8 см, образует с большим основанием угол 30°.**(4 балла)**

Решение. По условию $AB = CD = BC = 5$ см, $AC = 8$ см, $\angle CAD = 30°$.

Проведем высоту CH. Так как $\angle CAD = 30°$, то $CH = \frac{1}{2}AC = 4$ см. ΔCDH – прямоугольный, значит, $DH = 3$ см. Так как трапеция равнобедренная, то $AD = BC + 2DH = 11$ см. Следовательно, площадь трапеции $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = 32\,\text{см}^2$.



Ответ: $S = 32\,\text{см}^2$.

№ 9. ***Задача.*** Решите уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$. **(4 балла)**

Решение. Функция $y = \log_2 x$ – функция возрастающая, значит, $y = \frac{3}{\log_2 x}$ – функция убывающая. С другой стороны, $y = 4x - 5$ – функция возрастающая, следовательно, уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$ имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

№ 10. ***Задача.*** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a - 5 + |x + 1|)(a - x^2 - 2x) = 0$ имеет ровно два корня. **(5 баллов)**

Решение. Уравнение $(a - 5 + |x + 1|)(a - x^2 - 2x) = 0$ равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} a - 5 + |x + 1| = 0, \\ a - x^2 - 2x = 0. \end{array}\right.$

Исследуем сначала первое уравнение: $a - 5 + |x + 1| = 0$. Это уравнение имеет два корня при $a < 5$, один корень $x = -1$ при $a = 5$ и не имеет корней при $a > 5$.

Выясним теперь, сколько корней имеет второе уравнение в зависимости от a:

$a - x^2 - 2x = 0$,

$x^2 + 2x + 1 = a + 1$,

$(x + 1)^2 = a + 1$

Очевидно, это уравнение имеет два корня при $a > -1$, один корень $x = -1$ при $a = -1$ и не имеет корней при $a < -1$.

Таким образом, данное уравнение имеет ровно два корня при $a < -1$ и $a > 5$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Решение задач

№ 1. Докажите, что для любых целых чисел a и b число $a^4 + b^4 + (a + b)^4$ является чётным.

Доказательство. Имеем:

$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 =$

$= 2a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 = 2(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) =$

$= 2(a^4 + 2a^3b + (ab)^2 + 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = 2(a^2 + b^2 + ab)^2$.

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	3 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2 балла
доказаны частные случаи	1 балл

№ 2. Рассматривается последовательность чисел 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, …. Какое число находится на 2018-м месте?

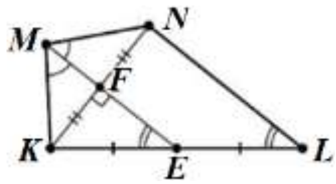
Ответ: 64.

Решение. В последовательности 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,…, n,… n (n раз), количество чисел равно $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Так как $\frac{63\cdot 64}{2}=2016$, то в наборе 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4, …, 63,…, 63 (63 раза) находится 2016 членов. Следующий член последовательно 64.

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	3 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2 балла
перебор вариантов	1 балл

№ 3. Найдите угол *KNL* выпуклого четырёхугольника *KMNL*, если биссектриса угла *M* проходит через середину стороны *KL*, а угол *N* равен сумме углов *K* и *L*.

Ответ: $\angle KNL$ – прямой.



Решение. Пусть *E* – середина стороны *KL*, а *F* – точка пересечения *ME* и *KN*. Из условия имеем:

$\angle M = 360° - 2(\angle K + \angle L)$,

откуда $\angle KEM = 180° - \angle K - \angle M/2 = \angle L$.

Значит, $ME \parallel NL$, и *EF* – средняя линия треугольника *KNL*, то есть *KF* = *FN*. Таким образом, *MF* – биссектриса и медиана треугольника *KMN*, а значит, и его высота. Следовательно, прямая *NL*, параллельная *MF*, также перпендикулярна *KN*, откуда и вытекает ответ.

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 4. Одиннадцатиклассница Маша готовится к ЕГЭ по математике и каждый выходной решает задачи. В это воскресенье каждый час число решенных задач снижалось на некоторое постоянное число процентов. Через 3 часа оказалось, что она решила 265,44% того, что решила за первый час. На сколько процентов в час снижалось количество решённых задач?

Ответ: 12.

Решение. Примем за *A* количество задач, решенных за первый час, а за *x* процент снижения. Тогда за второй час будет решено $\frac{A(100-x)}{100}$ задач, а за третий час – $\frac{A(100-x)^2}{100^2}$ задач. Решив квадратное уравнение

$$\frac{A(100-x)^2}{100^2}+\frac{A(100-x)}{100}+A=2{,}6544A,$$

найдём $x = 12$.

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, но допущена вычислительная ошибка	3 балла
задача решена в предположении конкретного числа задач	2 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 5. Решите уравнение: $\sqrt{(2x-1)(x+2)}-3\sqrt{x+2}=4-\sqrt{(2x-1)(x+6)}+3\sqrt{x+6}$.

Ответ: 7.

Решение. Имеем:

$\sqrt{(2x-1)(x+2)}-3\sqrt{x+2}=4-\sqrt{(2x-1)(x+6)}+3\sqrt{x+6}$,

$\sqrt{(2x-1)(x+2)}-3\sqrt{x+2}+\sqrt{(2x-1)(x+6)}-3\sqrt{x+6}=4$,

$\sqrt{x+2}\left(\sqrt{2x-1}-3\right)+\sqrt{x+6}\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$,

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}=\dfrac{4}{\sqrt{2x-1}-3}$.

Отсюда следует, что $\dfrac{4}{\sqrt{2x-1}-3}>0$, то есть $\sqrt{2x-1}>3$, откуда $2x-1>9,\ x>5$.

Умножим последнее уравнение на сопряженное выражение $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$. Получаем:

$x+6-(x+2)=\dfrac{4\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{2x-1}-3}$. Откуда, $1=\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}-3}$,

$1=\left(\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}-3}\right)^2$,

$1=\dfrac{x+6-2\sqrt{x+6}\sqrt{x+2}+x+2}{2x-1-6\sqrt{2x-1}+9}$,

$1=\dfrac{x+4-\sqrt{x+6}\sqrt{x+2}}{x+4-3\sqrt{2x-1}}$,

$\sqrt{x+6}\sqrt{x+2}=3\sqrt{2x-1}$,

$x^2+8x+12=18x-9$,

$x^2-10x+21=0$, $x_1=3,<5;\quad x_2=7$.

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	5 баллов
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3 балла
верное, в целом, рассуждение, но не произведен отбор корней	2 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 6. Будем называть четырёхзначное число *супер счастливым*, если в его десятичной записи сумма первых двух цифр равна сумме последних двух цифр, и это число представимо в виде суммы двух четырёхзначных палиндромов. Сколько существует супер счастливых чисел?

Ответ: 80.

Решение: Пусть число $\overline{abcd} = \overline{nmmn} + \overline{xyyx}$, тогда

$$\overline{abcd} = 1001(n+x) + 110(m+y) \vdots 11$$

Из признака делимости на 11 следует $b+d = a+c$. Так как число $\overline{abcd}$ идеальное, то получаем $a = d$ и $b = c$, следовательно, исходное число палиндром, причем первая цифра не равна 1 (иначе оно не представляется в виде суммы двух четырехзначных чисел). Все четырехзначные палиндромы задаются первыми двумя цифрами, причем первая цифра может быть выбрана 8 способами, а вторая 10. В итоге получаем, что таких чисел всего $8 \cdot 10 = 80$. Осталось заметить, что каждое полученное число можно представить в виде $\overline{abba} = 1001 + \overline{(a-1)bb(a-1)}$. ■

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	5 баллов
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 7. На доске написано число 2018. Шестиклассники Ира и Саша играют в такую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Ира. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Ира.

Решение. Невозможно сделать ход только если на доске написана единица. При этом из нечётного числа всегда получается чётное. Ира, получив чётное число, всегда может вычесть 1 и снова получить нечётное. Таким образом, Ира всегда может получать от Саши чётные числа, и отдавать ему нечётные, а Саша наоборот (потому что у него не будет другой возможности). В конце концов, Ира получит в результате своего вычитания 1 и Саша не сможет сделать ход.

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

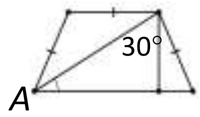
II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

№ 8. ***Задача.*** Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание, имеющее длину 5 см, равно боковой стороне, а диагональ, равная 8 см, образует с большим основанием угол 30°.

Решение.

По условию $AB = CD = BC = 5$ см, $AC = 8$ см, $\angle CAD = 30°$.

Проведем высоту CH. Так как $\angle CAD = 30°$, то $CH = \frac{1}{2}AC = 4$ см. ΔCDH – прямоугольный, значит, $DH = 3$ см. Так как трапеция равнобедренная, то $AD = BC + 2DH = 11$ см. Следовательно, площадь трапеции $S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = 32\,\text{см}^2$.



Ответ: $S = 32\,\text{см}^2$.

Комментарий. Условие задачи некорректно: такой трапеции не существует. Это можно показать различными способами.

1) В решении на основе данных задачи получено, что $DH = 3$ см, значит $AH = BC + DH = 8$ см. Таким образом, в прямоугольном треугольнике ACH гипотенуза AC равна катету, что невозможно.

2) Рассмотрим треугольник ABC: $\angle ACB = \angle CAD = 30°$ (накрест лежащие). По теореме косинусов:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle ACB = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 89 - 40\sqrt{3}$. Пришли к противоречию с условием, из которого следует, что $AB^2 = 25$.

есть в работе	баллы
приведено любое грамотное обоснованное объяснение ошибки	4 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 9. ***Задача.*** Решите уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$.

Решение. Функция $y = \log_2 x$ – функция возрастающая, значит, $y = \frac{3}{\log_2 x}$ – функция убывающая. С другой стороны, $y = 4x - 5$ – функция возрастающая, следовательно, уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$ имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 2$.

Ответ: 2

Комментарий. Ошибка приведенного решения состоит в том, что из того, что функция $y = \log_2 x$ является возрастающей, следует, что функция $y = \frac{3}{\log_2 x}$ является убывающей на каждом из промежутков ее области определения, т.е. на промежутках $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Следовательно, на каждом из них данное уравнение имеет не более одного решения. Кроме $x = 2$ данное уравнение имеет еще решение $x = \frac{1}{2}$.

есть в работе	баллы
а) приведено любое грамотное объяснение ошибки	2 балла
б) верно и обоснованно получен верный ответ в правильном решении	2 балла
Всего:	баллы за а) и б) суммируются

№ 10. ***Задача.*** Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a-5+|x+1|)(a-x^2-2x)=0$ имеет ровно два корня.

Решение. Уравнение $(a-5+|x+1|)(a-x^2-2x)=0$ равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} a-5+|x+1|=0, \\ a-x^2-2x=0. \end{array}\right.$

Исследуем сначала первое уравнение: $a-5+|x+1|=0$. Это уравнение имеет два корня при $a < 5$, один корень $x = -1$ при $a = 5$ и не имеет корней при $a > 5$.

Выясним теперь, сколько корней имеет второе уравнение в зависимости от a:

$a-x^2-2x=0$,

$x^2+2x+1=a+1$,

$(x+1)^2=a+1$

Очевидно, это уравнение имеет два корня при $a > -1$, один корень $x = -1$ при $a = -1$ и не имеет корней при $a < -1$.

Таким образом, данное уравнение имеет ровно два корня при $a < -1$ и $a > 5$.

Ответ: $a \in (-\infty;-1) \cup (5;+\infty)$.

Комментарий. В приведенном решении допущена ошибка. Не рассмотрен случай совпадения корней первого и второго уравнений.

Правильный ответ: $a \in (-\infty;-1) \cup \{3\} \cup (5;+\infty)$.

есть в работе	баллы
а) приведено любое грамотное объяснение ошибки	2 балла
б) верно и обоснованно получен верный ответ в правильном решении	3 балла
Всего:	баллы за а) и б) суммируются