РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 2019 года

I. Решите задачи

№ 1. Боря Бармалейкин записал на доске четыре последовательные цифры, затем поменял местами первые две. Получилось четырехзначное число. Оля Знайкина утверждает, что полученное число является полным квадратом, причём она знает какого числа. А вы сможете узнать? **(3 балла)**

Ответ: $66^2 = 4356$.

Решение. Пусть последовательные цифры имеют вид: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Согласно условию задачи, получаем:

$$1000\cdot(n+1)+100\cdot n+10\cdot(n+2)+n+3=k^2 \text{ или } 11\cdot(101n+93)=k^2.$$

Отсюда видно, что k^2, а значит и k, должно быть кратным 11. Пусть $k = 11p$, тогда

$$\frac{101n+93}{11}=9n+8+\frac{2n+5}{11}=p^2.$$

Выражение $\frac{2n+5}{11}$ должно быть целым числом. Поскольку n – цифра, то единственно возможное значение n есть 3, а искомое число 4356, которое равно квадрату числа 66.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	3 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2 балла
верный ответ получен подбором подходящего значения	1 балл
только верный ответ без обоснования	0 баллов

№ 2. Теперь Боря Бармалейкин записал три последовательных чётных числа. Оля Знайкина у первого числа нашла наибольший чётный собственный делитель, у второго – наибольший нечётный собственный делитель, у третьего – опять наибольший чётный собственный делитель. Может ли сумма трёх полученных делителей быть равна 2019? (Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и этого числа). **(3 балла)**

Ответ: Да, может.

Решение. Вот пример: 1344, 1346 и 1348. У первого числа наибольший чётный собственный делитель равен 672, у третьего – 674, у второго наибольший нечётный собственный делитель равен 673. 672 + 673 + 674 = 2019.

Есть два естественных способа додуматься до этого примера. Можно попытаться так подобрать тройку, чтобы первое число в ней делилось на 4, т.е. имело вид $4n$. Тогда следующее число будет равно $4n + 2$, а третье – $4n + 4$. Но тогда ясно, что делители, о которых идёт речь в задаче, равны $2n$, $2n + 1$ и $2n + 2$. Остаётся решить уравнение:

$$2n + (2n + 1) + (2n + 2) = 2019. \text{ Откуда } n = 336.$$

А можно просто записать число 2019 в виде 672 + 673 + 674 = 2019 и удвоить каждое из слагаемых.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	3 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2 балла
только верный ответ без обоснования	0 баллов

№ 3. Боря Бармалейкин и Оля Знайкина играют в такую игру: Боря называет любое целое число от 1 до 9 включительно, Оля прибавляет к нему ещё какое-нибудь однозначное число и называет сумму, к этой сумме Боря прибавляет ещё какое-нибудь однозначное число и опять называет сумму и т.д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 2019. Как нужно играть в такую игру, чтобы выиграть? Кто выиграет при правильной игре? **(4 балла)**

Ответ: выиграет Боря.
Решение. 2019 = 2000 + 10 + 9, поэтому Боря называет в начале игры число 9. Пусть Оля прибавляет число *c*, тогда Боря должен прибавить разность 10 – *c,* увеличив общую сумму на 10. Боря выиграет, если не отступит от этого правила.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 4. В треугольнике *ABC* угол *C* – прямой, высота *CH* = 0,25*AB*. Найдите острые углы треугольника. **(4 балла)**

Ответ: 15 и 75 градусов.
Решение. Как известно, медиана *CM* равна половине гипотенузы *AB*. Высота *CH* по условию равна 0,25*AB*. Стало быть, в прямоугольном треугольнике *CHM* гипотенуза *CM* вдвое длиннее катета *CH*. Следовательно, угол *CMH* равен 30°, а смежный с ним угол (пусть это *BMC*) равен 150°. Поскольку это угол при вершине равнобедренного треугольника *BMC*, то $\angle ABC = \angle MBC = \dfrac{180^\circ - \angle BMC}{2} = 15^\circ$, откуда и получаем ответ.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3 балла
тригонометрическое решение без обоснования значений нужных функций углов в 15 и 75 градусов	2 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 5. Решите уравнение: $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$. **(5 баллов)**

Ответ: 15.

Решение. Пусть $t=\sqrt{2x-5}$, где $t\ge 0$, тогда $x=\dfrac{t^2+5}{2}$. Уравнение принимает вид:

$$\sqrt{\frac{t^2+5}{2}-2+t}+\sqrt{\frac{t^2+5}{2}+2+3t}=7\sqrt{2}.$$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{2}$, получим:

$$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14,$$

$$\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t+3)^2}=14,$$

$$|t+1|+|t+3|=14.$$

Т.к. $t\ge 0$, то $|t+1|=t+1$ и $|t+3|=t+3$, и полученное уравнение принимает вид: $t+1+t+3=14$, откуда, t = 5, x = 15.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
полное обоснованное решение	5 баллов
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	4 балла
при извлечении корней потерян знак модуля	3 балла
верный ответ получен подбором подходящего значения	1 балл

№ 6. У Оли Знайкиной есть 2019 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2019 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Оля выбирает две карточки так, чтобы сумма написанных на них чисел делилась на 100. Сколькими способами она сможет это сделать? **(5 баллов)**

Ответ: 20360.

Решение. Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

1) Число на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 20 штук). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы число на ней также оканчивалось на 00. Всего получаем $C_{20}^2=\dfrac{19\cdot 20}{2}=190$ вариантов.

2) Аналогично, если число на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 20 штук), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы число на ней оканчивалось на 50, т.е. и здесь 190 вариантов.

3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 19 (таких карточек 19·21 = 399). Для каждой из них пару можно выбрать 20 способами (если число оканчивается на 1, то подойдёт любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 – любая карточка с числом, оканчивающимся на 98 и т.д.). Таким образом, получаем 399 · 20 = 7980 вариантов.

4) Номер на карточке оканчивается на число от 20 до 49 (таких карточек 30 · 20 = 600). Для каждой из них пару можно выбрать 20 способами (аналогично предыдущему случаю). Таким образом, получаем 600 · 20 = 12000 вариантов.

5) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего и четвёртого случаев (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

Итого выходит 190 + 190 + 7980 + 12000 = 20360 способов.

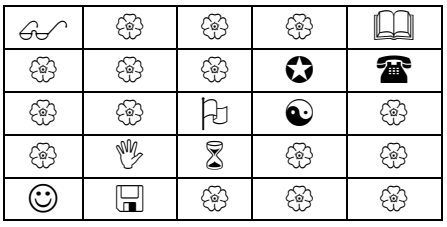
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
полное обоснованное решение	5 баллов
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	4 балла
хотя бы в одном из случаев подсчёт произведён неверно	3 балла
хотя бы в одном из случаев подсчёт произведён верно	1 балл
только верный ответ без обоснования	0 баллов

№ 7. Боря Бармалейкин в каждой клетке таблицы 5×5 записал по одному специальному знаку так, что в любой строке и в любом столбце не больше трёх различных знаков. Какое наибольшее число различных специальных знаков может быть в Бориной таблице? **(4 балла)**

Ответ. 11.

Решение. Если в каждой строке не больше двух различных знаков, то общее их число не превосходит 10 = 5 · 2. Далее можно считать, что в первой строке ровно три различных знака. Если каждая из оставшихся строк имеет хотя бы один общий знак с первой, то общее число знаков не превосходит 3 + 4 · 2 = 11. Пусть имеется строка, можно считать, вторая, в которой три различных знака, отличных от знаков первой строки. Тогда в каждом столбце кроме специальных знаков первой и второй строк может быть не более одного нового знака, всего не более 3 + 3 + 5 · 1 = 11 знаков.



Пример расстановки 11 различных специальных знаков: по главной диагонали таблицы из левого нижнего угла в правый верхний записаны первые пять различных знаков, по соседней снизу диагонали – следующие четыре, в левом верхнем углу – десятый, а в остальных клетках – одиннадцатый знак.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
полное обоснованное решение	4 балла
доказана максимальность 11 (оценка)	3 балла
только пример для 11	2 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

№ 8. ***Задача.*** Решите уравнение $\left(x^2+2x-5\right)^2+2\left(x^2+2x-5\right)-5=x$.

Решение Оли Знайкиной. Пусть $f(x)=x^2+2x-5$, тогда уравнение имеет вид $f(f(x))=x$ или, что то же самое, $f(x)=f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, поэтому, если они пересекаются, то точка пересечения графиков лежит на этой прямой.

Таким образом, если число x_0 – корень данного уравнения, то оно является и корнем уравнения $f(x)=x$. Решая уравнение $x^2+2x-5=x$, получим, что $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$. **(4 балла)**

Решение (комментарий). Правильный ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Предложенное решение основывается на трёх утверждениях:

1) Уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=f^{-1}(x)$.

2) Если графики двух взаимно обратных функций пересекаются, то точки их пересечения лежат на прямой $y = x$.

3) Из уравнения $f(f(x))=x$ следует уравнение $f(x)=x$.

Каждое из этих утверждений ложно, причем 3) автоматически следует из неверных утверждений 1) и 2). Обоснуем это.

1) Утверждение выполняется только для обратимых функций. В данном случае функция $f(x)=x^2+2x-5$ обратимой не является (существуют различные значения аргумента, которым соответствуют одинаковые значения функции).

2) Точки пересечения графиков взаимно обратных функций могут не лежать на прямой $y = x$, а быть симметричными относительно этой прямой. Например, рассмотрим взаимно обратные функции $f(x)=-x^3$ и $g(x)=-\sqrt[3]{x}$, графики которых имеют три точки пересечения: (0; 0), (1; –1), (–1; 1).

3) Как будет показано ниже, данное уравнение имеет корни, отличные от корней уравнения $x^2+2x-5=x$. Отметим, что обратное утверждение является верным: $f(x)=x\Rightarrow f(f(x))=f(x)\Rightarrow f(f(x))=x$. Поэтому корни уравнения, полученные в решении, действительно являются корнями исходного уравнения, но не составляют все множество корней, т.е. приведенный ответ неверен.

Приведем два основных способа решения данного уравнения.

Первый способ. Приведем исходное уравнение к виду $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$ (*). Многочлен, полученный в левой части уравнения, раскладывается на множители $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=\left(x^2+x-5\right)\left(x^2+3x-2\right)$, тогда уравнение (*) равносильно совокупности двух квадратных уравнений, корнями которых являются числа $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ и $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Второй способ. Пусть $x^2+2x-5=y$, тогда $y^2+2y-5=x$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} x^2+2x-5=y, \\ y^2+2y-5=x. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе и преобразуем: $x^2-y^2+3x-3y=0$, откуда, $(x-y)(x+y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y, \\ y=-x-3. \end{array}\right.$

Подставив полученные выражения в любое из уравнений системы, получим совокупность двух квадратных уравнений. Решив квадратные уравнения, найдем ответ.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
а) приведено любое грамотное объяснение ошибки	2 балла
б) верно и обоснованно получен верный ответ в правильном решении	2 балла
Всего:	баллы за а) и б) суммируются

№ 9. Задача. При каких значениях параметра *a* система уравнений $\begin{cases} y=x^2-2x, \\ x^2+y^2+a^2=2x+2ay \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

Решение Бори Бармалейкина. Имеем $\begin{cases} y=x^2-2x, \\ x^2-2x+y^2+a^2=2ay; \end{cases}$

$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y+y^2+a^2-2ay=0. \end{cases}$ Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно *y*, тогда $y^2+(1-2a)y+a^2=0$. Для того чтобы решение было единственным, потребуем равенства нулю дискриминанта: $D=1-4a+4a^2-4a^2=1-4a=0$, откуда *a* = 0,25.

Ответ: 0,25. **(4 балла)**

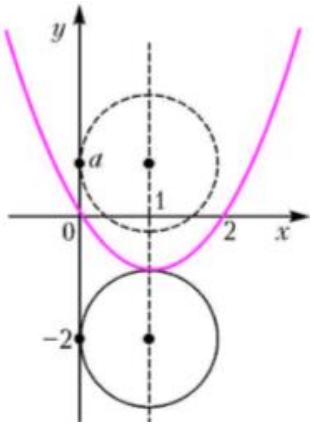
Решение (комментарий). Правильный ответ: *a* = –2.

Из того, что одно из уравнений системы имеет единственное решение, не следует, что система также имеет единственное решение.

Действительно, в нашем случае при *a* = 0,25 решением рассмотренного уравнения является *y* = –0,25. Тогда первое уравнение системы примет вид $x^2-2x+0{,}25=0$. Так как его дискриминант $D_1=1-0{,}25>0$, то оно имеет два различных корня. Значит, при *a* = 0,25 система имеет два решения.

Приведем одно из возможных верных решений. Преобразуем систему к виду: $\begin{cases} y=x^2-2x, \\ (x-1)^2+(y-a)^2=1. \end{cases}$

Тогда графиком первого уравнения в декартовой системе координат является парабола, а графиком второго уравнения – окружность (для каждого значения a). Заметим, что прямая $x = 1$ является осью симметрии параболы и окружности, поэтому точки их пересечения (если они есть) симметричны относительно этой прямой. Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики пересекаются только на оси симметрии. Этот случай соответствует их касанию в вершине параболы, причём окружность расположена ниже параболы. Отсюда следует верный ответ: при $a = -2$.



Рекомендации по проверке:

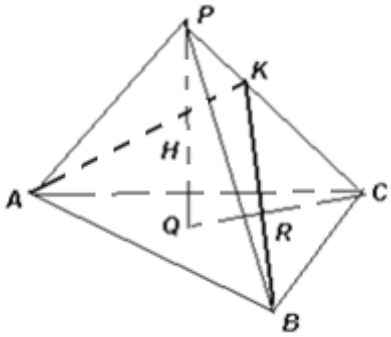
есть в работе	баллы
а) приведено любое грамотное объяснение ошибки	2 балла
б) верно и обоснованно получен верный ответ в правильном решении	2 балла
Всего:	баллы за а) и б) суммируются

№ 10. ***Задача.*** В правильной треугольной пирамиде $PABC$ сторона основания $BC = 3$, высота $PQ = 1$. Через ребро основания AB проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру PC. Найдите площадь сечения.

Решение Оли Знайкиной. Пусть треугольник ABK – данное перпендикулярное сечение пирамиды $PABC$. Запишем объем пирамиды двумя способами:

1) $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; 2) $V = \frac{1}{3} S_{ABK} \cdot PC$.

$CQ = R = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, тогда $PC = \sqrt{PQ^2 + CQ^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

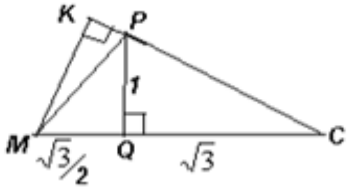


Отсюда, $\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} S_{ABK} \cdot 2$, тогда $S_{ABK} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{8}$. **(5 баллов)**

Решение (комментарий). Условие «задачи» некорректно, так как плоскость, содержащая ребро основания и перпендикулярная противолежащему боковому ребру, пересекает это ребро в точке, лежащей вне пирамиды. Докажем это.

Пусть M – середина AB, тогда отрезок CM содержит точку Q. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(AB)\perp(CMP)$ (см. рисунок в условии). В прямоугольном треугольнике PQC: $PQ = 1$, $PC = 2$, значит, $PQ = 0{,}5PC$, следовательно, $\angle PCQ = 30°$, $\angle CPQ = 60°$. Из прямоугольного треугольника PQM: $tg\angle MPQ = \frac{MQ}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3} = tg30°$, значит,



$\angle MPQ > 30°$, тогда $\angle CPM > 90°$. Прямая MK является пересечением плоскостей CPM и указанного сечения, поэтому отрезок MK – высота треугольника CPM. Так как угол CPM – тупой, то эта высота лежит вне треугольника.

Таким образом, заданное сечение состоит только из ребра AB и искать его площадь не имеет смысла.

По результатам анализа ошибки, допущенной в «решении», возможна и другой комментарий: можно считать условие «задачи» корректным, тогда неверны «решение» и «ответ». Верным решением будет являться доказательство того, что искомым сечением является только ребро основания, а верный ответ: 0.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
а) указано, что условие «задачи» некорректно (либо корректно, но «ответ» неверный)	1 балл
б) указано, что искомое сечение проведено неверно, но это не обосновано	1 балл
в) доказано, что плоскость искомого сечения пересекает продолжение бокового ребра	3 балла
Всего:	баллы за а), б) и в) суммируются