I. Решите предложенные задания.

1. Расстояние между городами Ставрополь и Ипатово составляет 135 км. Из Ипатово в Ставрополь выехал автобус, который сделал в пути остановку. Средняя скорость автобуса равна 50 км/ч, ехал автобус со скоростью 60 км/ч. Найдите время стоянки.
2. Пусть $a+b+c=0, \quad (a \neq 0)$. Верно ли равенство $ab+bc+ac=0$?
3. Найдите количество натуральных делителей числа $N=10^{2023}$, являющихся точными квадратами.
4. Для прямоугольного информационного стенда подготовили квадратные 2×2 и прямоугольные 1×4 карманы, полностью покрывающие поверхность стенда (без наложений и свободного пространства). Позже обнаружили, что один из карманов 2×2 имеет дефект. Взамен дефектному элементу приобрели карман 1×4. Получится ли в результате сделанной замены полностью покрыть поверхность стенда (без наложений и свободного пространства)?
5. На данной окружности отметили две точки M и N (точки не являются диаметрально противоположными), далее построили треугольник ABC, основанием которого является диаметр AB (выбран произвольно) этой окружности, не пересекающийся с отрезком MN, а стороны BC и AC проходят через точки M и N. Докажите, что высоты всех таких треугольников ABC, опущенные из вершины C на сторону AB, пересекаются в одной точке.
6. Некоторое число представляет собой сумму двух тысяч двадцати натуральных слагаемых. Все числа, входящие в это представление, имеют одинаковую сумму цифр. Так же это число можно получить, сложив две тысячи двадцать одно натуральное слагаемое с одинаковой суммой цифр. Найдите наименьшее число, обладающее этим представлением.
7. Решите уравнение $\left(1+x^{2024}\right)\cdot\left(1+x\right)^{2022}=\left(2x\right)^{2023}$.

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так и в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство). В случае некорректного условия прокомментируйте предложенное решение.

8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+xy+y=1, \\ y+yz+z=2, \\ z+zx+x=5. \end{cases}$$

Ответ: (-3; -2;-4).

Решение. Выразим переменные:

$$x=\frac{1-y}{1+y}, \qquad y=\frac{2-z}{1+z}, \qquad z=\frac{5-x}{1+x}.$$

Продолжим преобразования

$$z=\frac{5-\frac{1-y}{1+y}}{1+\frac{1-y}{1+y}}=\frac{4+6y}{2}=2+3y,$$

$$y=\frac{2-(2+3y)}{1+2+3y}=\frac{-3y}{3+3y}=\frac{-y}{1+y},$$

$$y+1=-1,$$
$$y=-2.$$

Подставим найденное значение y и найдём решение системы $x=\frac{1+2}{1-2}=-3$, $z=\frac{5+3}{1-3}=-4$.

9. Найдите количество действительных решений тригонометрического уравнения

$$tg\,\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\sqrt{3}.$$

Ответ: бесконечное множество решений.

Решение. Решим уравнение:

$$tg\,\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$$

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}+n,$$

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{1+3n}{3},$$

$$(1+3n)(x^2+x+1)=6x,$$

$$(1+3n)x^2+(-5+3n)x+(1+3n)=0.$$

Так как n - целое число, то мы имеем квадратное уравнение. Чтобы корни были действительными, необходим неотрицательный дискриминант:

$$D=(-5+3n)^2-4(1+3n)^2=(-5+3n-1-3n)(-5+3n+1+3n)$$

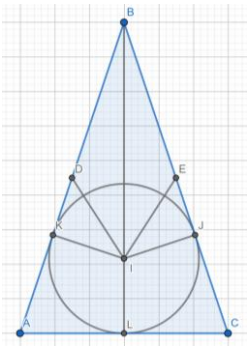
$$D=-6(6n-4),$$

т.о. $-6(6n-4)\geq 0, \qquad 6n-4\leq 0, \quad n\leq \frac{2}{3}.$

Это говорит о бесчисленном множестве решений уравнения.

10. Если центр вписанной в треугольник окружности равноудалён от середин двух его сторон, то треугольник равнобедренный.

Доказательство: Рассмотрим треугольник ABC, I - центр вписанной окружности. D и E - середины сторон AB и CB соответственно, $ID=IE$, K и J - точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC соответственно. Прямоугольные треугольники IKD и IJE равны по гипотенузе и катету, следовательно, равны соответствующие углы $\angle KDI=\angle JEI$. Смежные углы с $\angle KDI=\angle JEI$ также будут равны: $\angle BDI=\angle BEI$. Тогда в треугольниках BDI и BEI будут также равны $\angle BID=\angle BIE$ (BI - биссектриса $\angle B$ следовательно, делит его пополам, $\angle BDI=\angle BEI$). Отсюда приходим к равенству треугольников $\Delta BDI=\Delta BEI$ по общей стороне BI и прилежащей к ней углам и равенству $BD=BE$. А так как D и E - середины сторон AB и CB соответственно, треугольник ABC - равнобедренный, что и требовалось доказать.



Задания и решения

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. *Решение каждой задачи оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи.* В случаях, не предусмотренных прямо дополнительными указаниями по проверке и оценке задачи, её решение оценивается по следующим общим правилам:

Оценка	*За что ставится*
7	Верное решение
6	Верное решение с недочётами
4-5	Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки
1-3	Решение в целом неверно, но содержит более или менее существенное продвижение в верном направлении
0	Решение неверно или отсутствует

Решение считается *неполным* в следующих случаях:

- если оно содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- если оно при верной общей схеме рассуждений содержит *пробелы*, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- если оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых разобрана, но некоторые, *аналогичные разобранным*, упущены.

При расхождении между общими и дополнительными указаниями применяются дополнительные. При явном противоречии между дополнительными указаниями и реально сложившейся ситуацией жюри олимпиады имеет право изменить данные в указаниях критерии оценок.

2. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за "нерациональность" решения (кроме отдельных редких случаев, когда это прямо предусмотрено дополнительными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки и т.п.***

3. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, вычислительные ошибки в *невычислительной* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочётам.

1. Расстояние между городами Ставрополь и Ипатово составляет 135 км. Из Ипатово в Ставрополь выехал автобус, который сделал в пути остановку. Средняя скорость автобуса равна 50 км/ч, ехал автобус со скоростью 60 км/ч. Найдите время стоянки.
   Ответ: 10 минут

Решение. Найдём время, которое было затрачено на движение $\frac{135\,км}{60\,км/ч} = 2ч\,25мин$. Определим время, затраченное на весь путь $\frac{135\,км}{50\,км/ч} = 2ч\,35мин$. Следовательно, остановка в пути заняла 10 минут.

2. Пусть $a+b+c=0, \quad (a \neq 0)$. Верно ли равенство $ab+bc+ac=0$?

Ответ: нет

Решение. Возведём в квадрат данное равенство:

$$(a+b+c)^2 = 0,$$

$$a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+bc+ac)=0,$$

$$ab+bc+ac=-\frac{1}{2}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)<0, т.к. (a \neq 0).$$

3. Найдите количество натуральных делителей числа $N=10^{2023}$, являющихся точными квадратами.

Ответ: 1024143

Решение. Представим число *N* в виде простых множителей $N = 2^{2023}\cdot 5^{2023}$.

Все делители, являющиеся точными квадратами, должны иметь чётную степень. Найдём количество чисел, имеющих в основании 2 или 5 с чётным показателем степени

$$2^0, 2^2, \ldots, 2^{2022} \qquad 5^0, 5^2, \ldots, 5^{2022}$$

и в первой, и во второй группе таких чисел по 1012. Таким образом, всего делителей числа *N*, имеющих чётную степень $1012\cdot 1012-1=1024143$. Мы вычитаем единицу, т.к. это число повторилось $2^0\cdot 5^0$ и $5^0\cdot 2^0$.

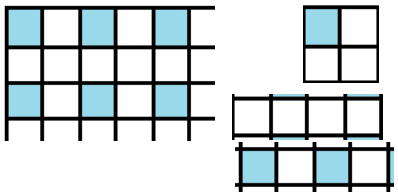
Дополнительные критерии	баллы
Единица в подсчётах учтена дважды	6
Единица в подсчётах не учтена	5
Не посчитаны делители, которые представлены только степенями двоек или пятёрок, все остальные делители учтены	3
Не посчитаны делители, которые представлены разными степенями двоек и пятёрок, но при этом посчитаны делители, представимые только степенями двоек /пятёрок и степени числа 10.	2
Посчитаны только чётные степени числа 10	1

4. Для прямоугольного информационного стенда подготовили квадратные 2×2 и прямоугольные 1×4 карманы, полностью покрывающие поверхность стенда (без наложений и свободного пространства). Позже обнаружили, что один из карманов 2×2 имеет дефект. Взамен дефектному элементу приобрели карман 1×4. Получится ли в результате сделанной замены полностью покрыть поверхность стенда (без наложений и свободного пространства)?

Карманы в этом случае могут изменить своё первоначальное положение.

Ответ: нет

Решение. Раскрасим данный прямоугольник следующим образом. Каждый квадрат 2×2 при любом положении на доске занимает одну закрашенную клетку и три не закрашенные, а прямоугольник - либо две закрашенные и две не закрашенные клетки, или четыре не закрашенные.

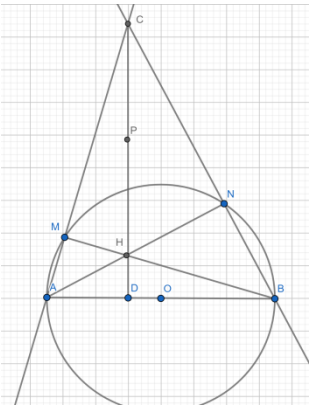


Следовательно, замена квадрата прямоугольником не позволит полностью покрыть поверхность стенда.

Дополнительные критерии	баллы
Другая раскраска, позволяющая провести доказательство	7
Правильный ответ без пояснений	0

5. На данной окружности отметили две точки M и N (точки не являются диаметрально противоположными), далее построили треугольник ABC, основанием которого является диаметр AB (выбран произвольно) этой окружности, не пересекающийся с отрезком MN, а стороны BC и AC проходят через точки M и N. Докажите, что высоты всех таких треугольников ABC, опущенные из вершины C на сторону AB, пересекаются в одной точке.

Доказательство: AN и BM - также высоты треугольника ABC. Пусть H - их точка пересечения.



Точки M, C, N и H лежат на окружности с диаметром CH. Пусть P - её центр.

Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, высота CD треугольника ABC проходит через точку P.

Угол C не зависит от положения диаметра AB, так как

$$\angle C = \frac{\breve{AB} - \breve{MN}}{2} = \frac{180^0 - \breve{MN}}{2}.$$

Поэтому любому указанному в условию положению диаметра AB соответствует одна и та же окружность с центром P. Следовательно, высоты CD всех таких треугольников ABC проходят через точку P.

Дополнительные критерии	баллы
Отмечено, что точки M, C, N и H лежат на окружности с диаметром CH.	4
Отмечено, что угол C не зависит от положения диаметра AB, но при этом других существенных продвижений нет	3
Отмечены оба факта: точки M, C, N и H лежат на окружности с диаметром CH; угол C не зависит от положения диаметра AB, но при этом не найдена точка P – как точка, через которую проходят высоты	5

6. Некоторое число представляет собой сумму двух тысяч двадцати натуральных слагаемых. Все числа, входящие в это представление, имеют одинаковую сумму цифр. Так же это число можно получить, сложив две тысячи двадцать одно натуральное слагаемое с одинаковой суммой цифр. Найдите наименьшее число, обладающее этим представлением.

Ответ: 10100.

Решение. Пусть для натурального числа n имеют место указанные представления:

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2020} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2021}.$$

Воспользуемся тем, что каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ даёт такой же остаток при делении на 9, что и его сумма цифр; обозначим этот остаток через r ($0 \le r \le 8$), а соответствующий остаток для чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{2021}$ через s ($0 \le s \le 8$).

Тогда числа $n - 2020r$ и $n - 2021s$ кратны 9, а значит, и число

$$(n - 2020r) - (n - 2021s) = 2021s - 2020r = 2021(r + s) - 4041r$$

кратно 9. Число 4041 кратно 9, а число 2021 взаимно просто с 9. Отсюда следует, что (r+s) кратно 9.

Если при этом r=s=0, то $n \geq 9 \cdot 2021$, поскольку $b_1, b_2, ..., b_{2021}$ делятся на 9. Если же $r \neq 0$, то $r + s = 9$, и поэтому имеет место по крайней мере одно из неравенств $r \geq 5$ или $s \geq 5$. Для числа n получаются неравенства $n \geq 5 \cdot 2020$ и $n \geq 5 \cdot 2021$ соответственно.
А так как $10100 = 5 \cdot 2020 = 4 \cdot 2020 + 2020 \cdot 1$ и числа 4 и 2020 имеют одинаковую сумму цифр, то число 10100 искомое.

Дополнительные критерии	**баллы**
Есть верный ответ, но нет оценки	2
При верном ответе не достаточно обоснован выбор остатков от деления на 9 для чисел первой и второй группы/ суммы цифр чисел, входящих в каждую из групп	5

7. Решите уравнение $\left(1 + x^{2024}\right) \cdot \left(1 + x\right)^{2022} = \left(2x\right)^{2023}$.

Ответ: 1

Решение. Заметим, что $x > 0$, т.к. левая часть равенства всегда положительна, а, следовательно, и правая часть также будет положительной. Оценим левую часть равенства: $1 + x^{2024} \geq 2x^{1012}$, ,

$$\left(1 + x\right)^{2022} = \left(1 + \sqrt{x}^2\right)^{2022} \geq \left(2\sqrt{x}\right)^{2022} = 2^{2022} x^{1011}$$

$\left(1 + x^{2024}\right) \cdot \left(1 + x\right)^{2022} \geq 2x^{2012} \cdot 2^{2022} x^{1011} = \left(2x\right)^{2023}$. Полученная оценка указывает на то, что $1 + x^{2024} = 2x^{1012}$ и $1 + \sqrt{x}^2 = 2\sqrt{x}$, следовательно, x = 1.

Дополнительные критерии	**баллы**
Отсутствие обоснования положительности x	5
Ответ x=1 без пояснений	1

8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + xy + y = 1, \\ y + yz + z = 2, \\ z + zx + x = 5. \end{cases}$$

Ответ: (-3; -2;-4).

Решение. Выразим переменные:

$$x = \frac{1 - y}{1 + y}, \quad y = \frac{2 - z}{1 + z}, \quad z = \frac{5 - x}{1 + x}.$$

Продолжим преобразования

$$z = \frac{5 - \frac{1 - y}{1 + y}}{1 + \frac{1 - y}{1 + y}} = \frac{4 + 6y}{2} = 2 + 3y,$$

$$y = \frac{2 - \left(2 + 3y\right)}{1 + 2 + 3y} = \frac{-3y}{3 + 3y} = \frac{-y}{1 + y},$$

$$y+1=-1,$$
$$y=-2.$$

Подставим найденное значение y и найдём решение системы

$x=\frac{1+2}{1-2}=-3$, $z=\frac{5+3}{1-3}=-4$.

Ответ: (-3; -2;-4); (1;0;2).

Решение. Выразим переменные:

$$x=\frac{1-y}{1+y},\qquad y=\frac{2-z}{1+z},\qquad z=\frac{5-x}{1+x}.$$

Заметим, что x, y и z не могут быть равны (-1), следовательно, можно делить.

Продолжим преобразования

$$z=\frac{5-\frac{1-y}{1+y}}{1+\frac{1-y}{1+y}}=\frac{4+6y}{2}=2+3y,$$

$$y=\frac{2-(2+3y)}{1+2+3y}=\frac{-3y}{3+3y}=\frac{-y}{1+y},$$

$$y(y+1)=-y,$$
$$y=-2 \ \textit{или} \qquad y=0.$$

Подставим найденные значения y и найдём решения системы

$y=-2$, $x=\frac{1+2}{1-2}=-3$, $z=\frac{5+3}{1-3}=-4$ или $y=0$, $x=1$, $z=2$.

Дополнительные критерии	**баллы**
Отсутствие обоснования, почему можем делить на этапе выражения переменных, при условии верного в дальнейшем решения	6
Отсутствие рассмотрения случая $y = 0$	2

9. Найдите количество действительных решений тригонометрического уравнения

$$tg\,\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\sqrt{3}.$$

Ответ: бесконечное множество решений.

Решение. Решим уравнение:

$$tg\,\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\frac{\pi}{3}+\pi n,\qquad n\in Z.$$

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}+n,$$

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{1+3n}{3},$$

$$(1+3n)(x^2+x+1)=6x,$$

$$(1+3n)x^2+(-5+3n)x+(1+3n)=0\,.$$

Так как n - целое число, то мы имеем квадратное уравнение. Чтобы корни были действительными, необходим неотрицательный дискриминант:

$$D=(-5+3n)^2-4(1+3n)^2=(-5+3n-1-3n)(-5+3n+1+3n)$$

$$D=-6(6n-4)\,,$$

т.о. $-6(6n-4)\geq 0,\ 6n-4\leq 0,\qquad n\leq\frac{2}{3}$.

Это говорит о бесчисленном множестве решений уравнения.

Ответ: 3.

Решение. Решим уравнение:

$$tg\,\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\frac{\pi}{3}+\pi n,\qquad n\in Z.$$

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}+n,$$

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{1+3n}{3},$$

$$(1+3n)(x^2+x+1)=6x,$$

$$(1+3n)x^2+(-5+3n)x+(1+3n)=0\,.$$

Так как n - целое число, то мы имеем квадратное уравнение. Чтобы корни были действительными, необходим неотрицательный дискриминант:

$$D=(-5+3n)^2-4(1+3n)^2=(-5+3n-2-6n)(-5+3n+2+6n)$$

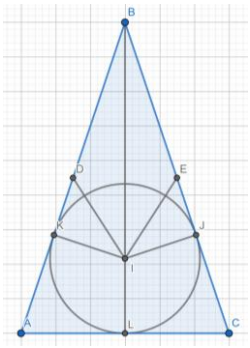
$$D=-(7+3n)(9n-3)\geq 0\,,$$

$$-2\frac{1}{3}\leq n\leq\frac{1}{3}.$$

Учитывая то, что n должно быть целым, получаем три возможных значения $n=\{-2;-1;0\}$, следовательно и решений тоже будет три.

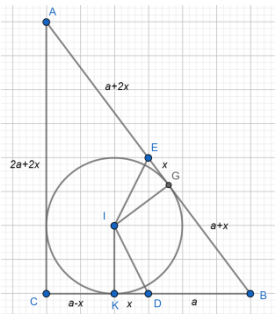
10. Если центр вписанной в треугольник окружности равноудалён от середин двух его сторон, то треугольник равнобедренный.

Доказательство: Рассмотрим треугольник *ABC*, *I* - центр вписанной окружности. *D* и *E* - середины сторон *AB* и *CB* соответственно, *ID* =*IE*, *K* и *J* - точки касания вписанной окружности со сторонами *AB* и *BC* соответственно. Прямоугольные треугольники *IKD* и *IJE* равны по гипотенузе и катету, следовательно, равны соответствующие углы $\angle KDI = \angle JEI$. Смежные углы с $\angle KDI = \angle JEI$ также будут равны: $\angle BDI = \angle BEI$. Тогда в треугольниках *BDI* и *BEI* будут также равны $\angle BID = \angle BIE$ (*BI* - биссектриса $\angle B$ следовательно, делит его пополам, $\angle BDI = \angle BEI$). Отсюда приходим к равенству треугольников $\Delta BDI = \Delta BEI$ по общей стороне *BI* и прилежащей к ней углам и равенству *BD*=*BE*. А так как *D* и *E* - середины сторон *AB* и *CB* соответственно, треугольник *ABC* - равнобедренный, что и требовалось доказать.



Решение. Формулировка утверждения не является верной. К этому можно прийти:

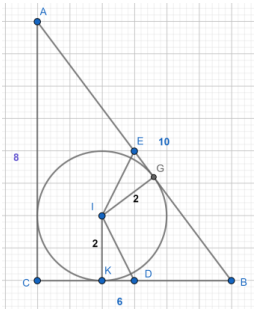
− расположив точки *D* и *E* в разных полуплоскостях относительно прямой *KJ* и проводя рассуждения для такого случая расположения точек:



Рассмотрим треугольник *ABC*, *I* - центр вписанной окружности. *D* и *E* - середины сторон *CB* и *AB* соответственно *ID* = *IE*, *K* и *G* - точки касания вписанной окружности со сторонами *BC* и *AB* соответственно. Прямоугольные треугольники *IKD* и *IGE* равны по гипотенузе и катету, следовательно, равны соответствующие стороны *GE* = *KD* = *x*. Пусть *DB* = *a*. Тогда, учитывая равенство отрезков касательных и то, что

D и *E* - середины сторон *CB* и *AB*, получаем следующие значения для сторон треугольника: *AB* = 2*a* + 4*x*, *BC* = 2*a*, *AC* = 2*a* + 2*x*. Таким образом, подбирая значения для *a* и для *x*, мы можем привести пример (ниже) неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего свойству: центр вписанной в неравнобедренный треугольник окружности равноудалён от середин двух его сторон.

− предложив контрпример (не проводя предварительные рассуждения):



Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* с катетами *AC* = 8, *BC* = 6, гипотенузой *AC* = 10. Пусть *I* - центр вписанной окружности; *E* и *D* - середины сторон *AB* и *BC* соответственно; *G* и *K* - точки касания вписанной окружности со сторонами *AB* и *BC* соответственно.

Тогда $IK = IG = \dfrac{8+6-10}{2} = 2$,

$DK = CD - CK = 3 - 2 = 1$,

$EG = BE - BG = 5 - 4 = 1$, Следовательно, $IE = ID = \sqrt{5}$.

Дополнительные критерии	баллы
Приведён любой другой верный контрпример (или с рассуждениями, что такой треугольник есть, или без этих рассуждений)	7
Рассмотрен 2-ой случай расположения точек (*D* и *E* в разных полуплоскостях относительно прямой *KJ*) без примера	4