Г.И. Ковалева
(Волгоград)

Итоговое повторение курса планиметрии с привлечением метода ключевой задачи

Метод составления системы задач, построенной по принципу – каждая задача системы использует результат решения одной какой-либо (ключевой) задачи, будем называть ***методом ключевой задачи***.

Существует две точки зрения на понятие ключевой задачи. Первая из них состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-факта. Зачастую такая ключевая задача оказывается дополнительной теоремой школьного курса. Вторая точка зрения состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-метода. При изучении какой-либо темы школьного курса можно отобрать определенный минимум задач, овладев методами решения которых, учащиеся будут в состоянии решить любую задачу на уровне программных требований по изучаемой теме.

«Ключевая» задача является средством решения других задач, поэтому ее знание учащимися обязательно. Разворачивающаяся система задач, с одной стороны, способствует усвоению факта или метода решения, изложенных в «ключевой» задаче, с другой, позволяет увидеть взаимосвязи отдельных тем школьного курса математики. Поэтому составленная данным методом система задач является эффективным средством повторения, обобщения и систематизации учебного материала.

Приведем системы, составленные методом «ключевых» задач, которые можно использовать для итогового повторения курса планиметрии.

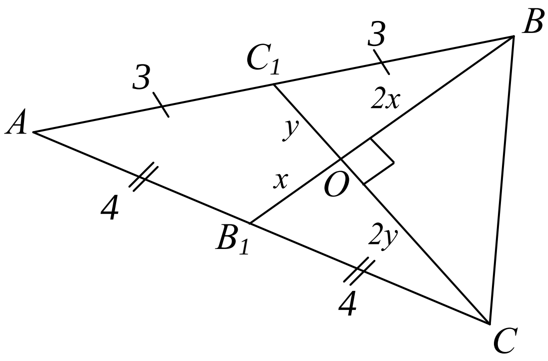
Свойства медиан треугольника

Ключевые задачи:

1. Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.
2. Медиана делит треугольник на два равновеликих.
3. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
4. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta AOB} = 3S_{\Delta AOC} = 3S_{\Delta BOC}$.

Задачи системы:

Задача 1. Две стороны треугольника соответственно равны 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника.



Р е ш е н и е. Пусть $AB=6$, $AC=8$. Тогда медианы CC_1 и BB_1 перпендикулярны и пересекаются в точке O.

$S_{ABC}=3S_{BOC}$. $\quad S_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC$, так как треугольник BOC прямоугольный.

По ключевой задаче: если $OB_1=x$, то $OB=2x$; если $OC_1=y$, то $OC=2y$.

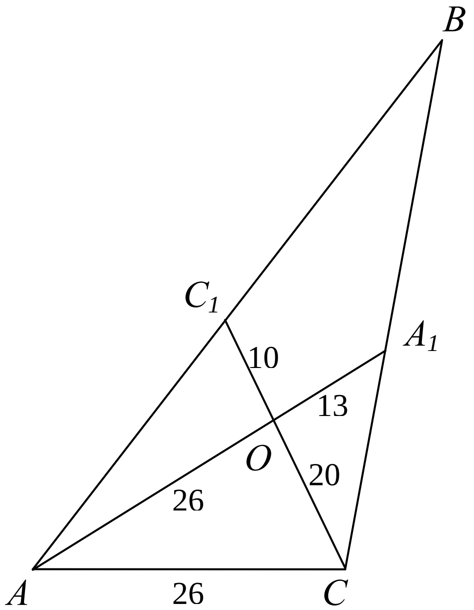
Треугольники BOC_1 и COB_1 прямоугольные и по теореме Пифагора имеем

$$\begin{cases} x^2+4y^2=16; \\ 4x^2+y^2=9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{3}}; \\ y=\sqrt{\frac{11}{3}}. \end{cases}$$

$S_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{11}}{3}$. Тогда $S_{ABC}=3\cdot\frac{4\sqrt{11}}{3}=4\sqrt{11}$.

О т в е т: $4\sqrt{11}$.

Задача 2. Длина одной из сторон треугольника равна 26, а длины медиан, проведенных к двум другим сторонам, равны 30 и 39. Найдите площадь треугольника.



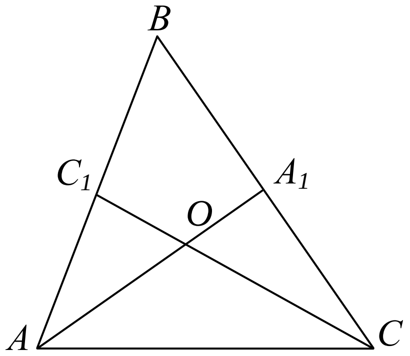
Р е ш е н и е.

По ключевой задаче $S_{ABC}=3S_{AOC}$, $AO=26$, $OC=20$. Найдем площадь треугольника AOC по формуле Герона: $S_{AOC}=\sqrt{36\cdot 10\cdot 10\cdot 16}=240$.

$S_{ABC}=3\cdot 240=720$.

О т в е т: 720.

Задача 3. В треугольника ABC AA_1 и CC_1 – медианы, причем AA_1=5, $\angle CAA_1=\frac{\pi}{8}$, $\angle ACC_1=\frac{\pi}{4}$. Найдите площадь треугольника ABC.



Р е ш е н и е. По ключевой задаче $S_{ABC}=3S_{AOC}$. $AO=\dfrac{10}{3}$. Длину стороны OC найдем по теореме синусов:

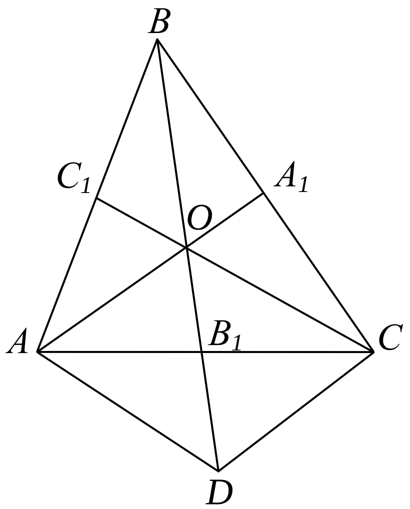
$$\frac{AO}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{OC}{\sin\frac{\pi}{8}},\ OC=\frac{10}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}.$$

Тогда $S_{AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot AO\cdot OC\cdot\sin\angle AOC$, $S_{AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot AO\cdot OC\cdot\sin\angle AOC$,

$$S_{AOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\sin\frac{5\pi}{8},S_{AOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\frac{25}{9}.$$

О т в е т: $\dfrac{25}{3}$.

Задача 4. Медианы треугольника 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника.



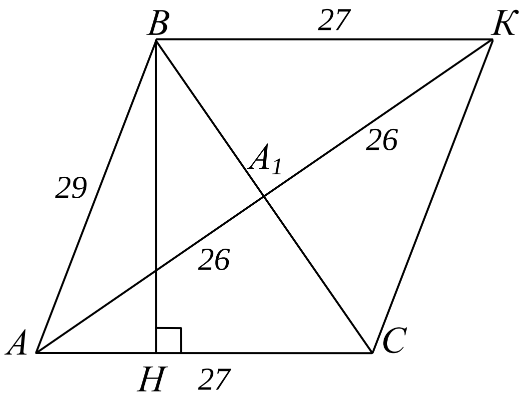
Р е ш е н и е. A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Пусть $AA_1=3$, $BB_1=4$, $CC_1=5$. Тогда по ключевой задаче $AO=2$, $CO=\dfrac{10}{3}$, $B_1O=\dfrac{4}{3}$ и $S_{ABC}=3S_{AOC}$. Достроим треугольник AOC до параллелограмма, отложив на прямой BB_1 от точки B_1 отрезок B_1D, равный B_1O.

Тогда $S_{AOC}=S_{AOD}=\dfrac{1}{2}S_{AOCD}$.

$$S_{AOD}=\sqrt{4\cdot 2\cdot\left(4-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{8}{3}\right)}=\frac{8}{3}.$$ Следовательно, $S_{ABC}=8$.

О т в е т: 8.

Задача 5. Длины двух сторон треугольника 27 и 29. Длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 26. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 27.



Р е ш е н и е. Пусть $AB = 29, AC = 27$, медиана $AA_1 = 26$.

Чтобы найти высоту ВН достаточно знать площадь треугольника АВС. Чтобы найти площадь треугольника АВС достроим его до параллелограмма АВКС, продлив медиану AA_1. Тогда $S_{ABC} = S_{ABK} = \frac{1}{2} S_{ABKC}$.

$S_{ABK} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 2 \cdot 25} = 270$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$, $270 = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot BH$, $BH = 20$.

О т в е т: 20.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике *ABC* медиана *AM* перпендикулярна медиане *BN*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если длина *AM* равна 3, а длина *BN* равна 4.

О т в е т: 8.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 2. Медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника.

О т в е т: 3.

3. Две медианы равнобедренного треугольника взаимно перпендикулярны. Боковая сторона равна $\sqrt{10}$. Найдите площадь треугольника.

О т в е т: 3.

4. В треугольнике *ABC* медианы *AD* и *BE* перпендикулярны, $AC = 3$, $BC = 4$. Чему равен квадрат третьей стороны?

О т в е т: 5.

5. Сторона треугольника равна 20, а медианы, проведенные к двум другим сторонам – 24 и 18. Найдите площадь треугольника.

О т в е т: 288.

6. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найти площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник его медианами.

О т в е т: 14.

7. Площадь треугольника *ABC* равна 12. Из вершины тупого угла *B* проведена медиана *BD*, длина которой равна 3. Найдите длину стороны *AC*, если угол *ABD* – прямой.

О т в е т: 10.

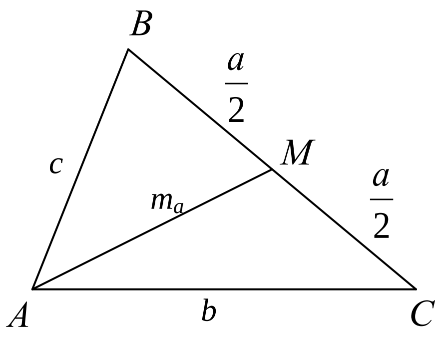
8. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана третьей стороны равна 2. (Указание – достроить до параллелограмма).

О т в е т: $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Длина медианы

Ключевая задача. Докажите, что если стороны *AB*, *AC* и *BC* треугольника *ABC* равны соответственно *c*, *b* и *a*, то длина медианы, проведенной к стороне *BC*, может быть вычислена по формуле $m_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2в^2 + 2c^2 - a^2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.



По теореме косинусов имеем:

из треугольника *ABM*

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\angle AMB;$$

из треугольника *ABC*

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\left(180^0 - \angle ABM\right)$$

или $b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \cdot m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\angle ABM$.

Сложим эти равенства, получим $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$. Отсюда $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2в^2 + 2c^2 - a^2}$.

Задачи системы:

Задача 1. Найдите отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

Р е ш е н и е.

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) + \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) + \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

О т в е т: $\frac{3}{4}$.

Задача 2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к катету, равна *l*. Найдите площадь треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть катет прямоугольного равнобедренного треугольника равен *a*. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2$. Из формулы длины медианы, выразим $a^2 = \frac{4}{5}l^2$. Тогда $S_{ABC} = \frac{2}{5}l^2$.

О т в е т: $\frac{2}{5}l^2$.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике к боковой стороне, длиной 4, проведена медиана, длиной 3. Найдите основание треугольника.

Р е ш е н и е. Используя формулу $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2в^2 + 2c^2 - a^2}$, найдем длину основания треугольника $3 = \frac{1}{2}\sqrt{2в^2 + 2 \cdot 4^2 - 4^2}$.

О т в е т: $\sqrt{10}$.

Задача 4. Найдите площадь треугольника, если его две стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана третьей стороны равна 2.

Р е ш е н и е.

1. Найдем *AC*, используя формулу длины медианы. $2=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 1^2+2\cdot\left(\sqrt{13}\right)^2-(AC)^2}$. $AC=\sqrt{12}$.

2. Треугольник *ABC* – прямоугольный, так как $\left(\sqrt{13}\right)^2=\left(\sqrt{12}\right)^2+1^2$. Следовательно, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}\cdot 1=\sqrt{3}$.

О т в е т: $\sqrt{3}$.

Задача 5. Сторона треугольника 14, а медианы, проведенные к двум другим сторонам, равны $3\sqrt{7}$ и $6\sqrt{7}$. Найдите длины неизвестных сторон треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть $AC=14$, $AB=c$, $BC=a$. Тогда длины медиан AA_1 и CC_1 можно найти по формулам: $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2\cdot 14^2-a^2}$ и $CC_1=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2\cdot 14^2-c^2}$. Имеем систему:

$$-\begin{cases}252=2c^2+392-a^2;\\ 1008=2a^2+392-c^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=364;\\ c^2=112.\end{cases}$$

О т в е т: $2\sqrt{91}$; $4\sqrt{7}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Одна сторона треугольника равна *a*, другая – *b*. Найдите третью сторону, если известно, что она равна медиане, проведенной к ней.

О т в е т: $\sqrt{\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{5}}$.

2. Основание равнобедренного треугольника $\sqrt{32}$, медиана боковой стороны 5. Найдите длины боковых сторон.

О т в е т: 6.

3. В равнобедренном треугольнике основание равно $2\sqrt{21}$, а угол при основании равен 30^0. Найдите длину медианы, проведенной к боковой стороне.

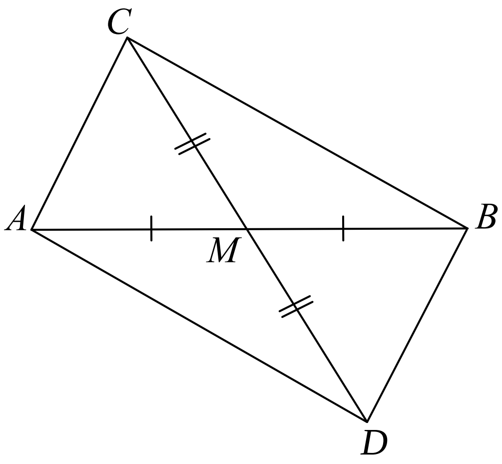
О т в е т: 7.

4. Медианы треугольника равны 5, $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Докажите, что треугольник прямоугольный.

5. Числа m_1, m_2 и m_3 выражают длины медиан некоторого треугольника. Докажите, что если выполняется равенство $m_1^2+m_2^2=5m_3^2$, то треугольник является прямоугольным.

Медиана, проведенная к гипотенузе

Ключевая задача. В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна ее половине.



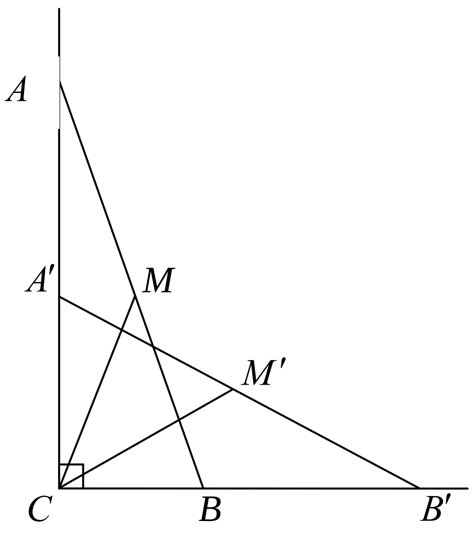
Д о к а з а т е л ь с т в о. Достроим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^0$) до параллелограмма, продлив луч CM и отложив от точки M отрезок MD, равный CM. Тогда $ACBD$ – прямоугольник. Следовательно, $AB = CD$. $CM = 0{,}5CD = 0{,}5AB$.

Следствия:

1. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.
2. Если в треугольнике длина медианы равна половине длины стороны, к которой она проведена, то этот треугольник – прямоугольный.

Задачи системы:

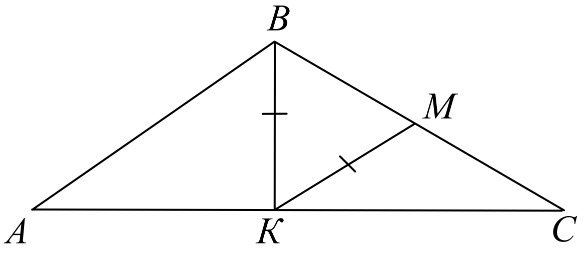
Задача 1. Лестница скользит по стенкам угла. Какую траекторию описывает фонарик, находящийся на средней ступеньке лестницы?



Р е ш е н и е. По ключевой задаче $CM = \frac{1}{2}AB$. Аналогично, $CM' = \frac{1}{2}A'B'$. Так как $AB = A'B'$, то $CM = CM'$.

Множество точек, отстоящих от точки C на одинаковом расстоянии, лежат на окружности. Таким образом, фонарик, находящийся на средней ступеньке лестницы, описывает дугу окружности.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 12. Точка M – середина BC $BK \perp AC$ и $BK{=}MK$. Найдите площадь треугольника ABC.



Р е ш е н и е. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$, $AC = 12$, следовательно, необходимо найти длину высоты *ВК*.

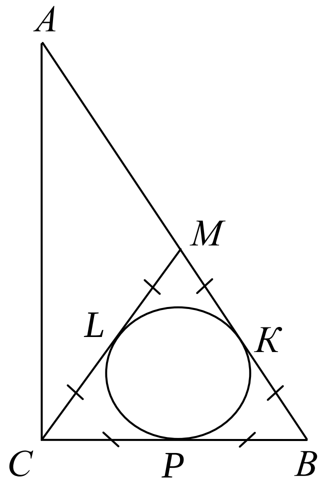
По ключевой задаче $KM = BM = MC$. Тогда треугольник *BMK* равносторонний и $\angle MBK = 60^0$.

Из прямоугольного треугольника *BCK* найдем *BK*: $BK = KC \cdot ctg60^0 = 2\sqrt{3}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

О т в е т: $12\sqrt{3}$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике *ABC* ($\angle C = 90^0$) *CM* – медиана. В треугольник *BMC* вписана окружность, которая точкой касания делит отрезок *BM* пополам. Найдите острые углы треугольника *ABC*.



Р е ш е н и е. По ключевой задаче $CM = AM = BM$.

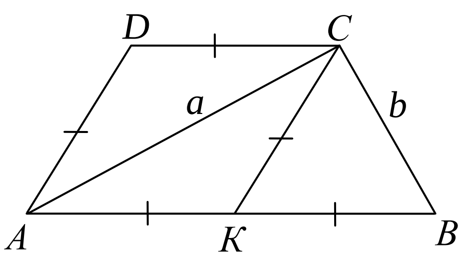
По условию задачи $MK = BK$. $MK = ML$ и $KB = PB$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности.

Следовательно, $MK = ML = CL = BK = PB$.

Так как $CL = CP$, то $AB = 2BC$. Следовательно, $\angle A = 30^0$, $\angle B = 60^0$.

О т в е т: 30^0; 60^0.

Задача 4. В трапеции *ABCD AB=2CD=2AD, AC=a, BC=b.* Найдите основания *AB* и *CD.*



Р е ш е н и е. *ADCK* – ромб, так как *AD=DC=AK.* Следовательно,

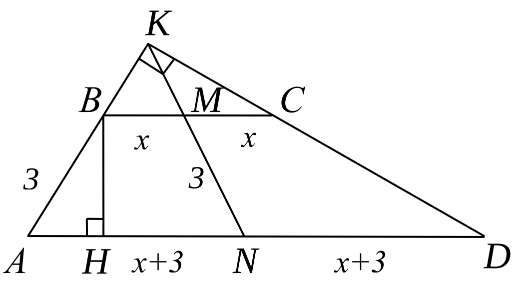
$$AD = CK = \frac{1}{2} AB.$$

По следствию из ключевой задачи треугольник *ACB* – прямоугольный.

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2},\ CD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

О т в е т: $\sqrt{a^2 + b^2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Задача 5. В трапеции углы при одном из оснований равны 30^0 и 60^0, длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длины оснований трапеции и ее площадь, если длина средней линии равна 5.



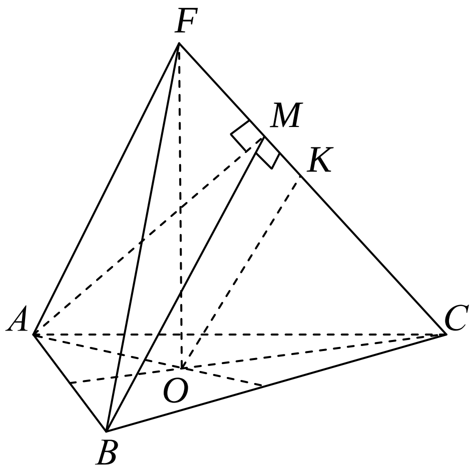
Р е ш е н и е. Пусть $\angle BAD = 60^0$, $\angle CDA = 30^0$, тогда продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом.
По ключевой задаче $KM = BM = MC$ и $KN = AN = ND$.
Пусть $KM = x$, тогда $KN = x + 3$.

По свойству средней линии трапеции: $2x + 3 = 5$, $x = 1$. Следовательно, $BC = 2$, $AD = 8$.

$S_{тр} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH$, $S_{тр} = 5 \cdot BH$, $BH = 3 \cdot \sin \angle BAD = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. $S_{тр} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т: 2; 8; $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$.

Задача 6. В правильной треугольной пирамиде отрезок, соединяющий центр основания с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями.



Р е ш е н и е. Пусть $AB = a$, тогда по условию задачи $OK = a$. По ключевой задаче $OK = \dfrac{1}{2} FC$, следовательно $FC = 2a$.
Далее из равнобедренного треугольника BFC найдем высоту BM:
$BM = \dfrac{\sqrt{15}}{4} a$.

Из равнобедренного треугольника AMB найдем косинус угла AMB:
$\cos \angle AMB = \dfrac{7}{15}$. Следовательно, угол между смежными боковыми гранями равен $\arccos \dfrac{7}{15}$.

О т в е т: $\arccos \dfrac{7}{15}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 3 см и делит прямой угол в отношении 2:1. Найдите меньший катет.

О т в е т: 3.

2. AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC. $AA_1 \perp CC_1$. Найдите $\dfrac{BB_1}{AC}$.

О т в е т: 1,5.

3. Медианы треугольника ABC AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. $AA_1 \perp CC_1$. $AA_1 = 9$ см. $CC_1 = 12$ см. Найдите BO.

О т в е т: 10.

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 4 раза больше проведенной к ней высоты. Найдите острые углы треугольника.

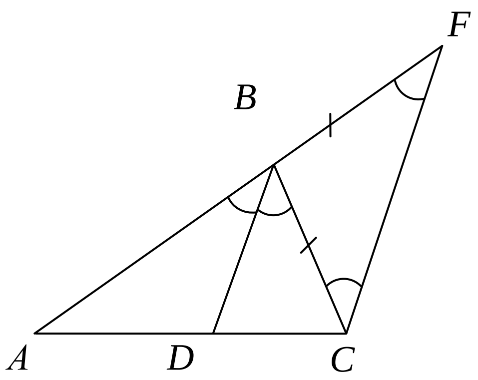
О т в е т: 15^0; 75^0.

5. В трапеции $ABCD$ углы при основании AD равны 20^0 и 70^0, длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

О т в е т: 3.

Свойство биссектрисы

Ключевая задача. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам.



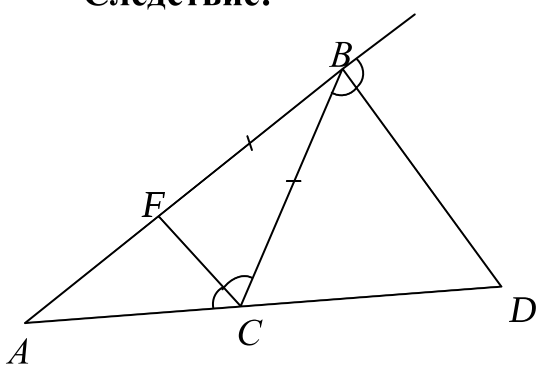
Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем *CF*, параллельно биссектрисе *BD*. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BF}$.

Треугольник *BCF* – равнобедренный.

Так как углы $\angle BFC$ и $\angle ABD$ равны как соответственные при параллельных прямых *BD* и *CF* и секущей *AF*, углы $\angle BCF$ и $\angle CBD$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых *BD* и *CF* и секущей *BC*, $\angle ABD=\angle CBD$ по свойству биссектрисы.

Следовательно, *BF*=*BC*. Тогда $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

Следствие:

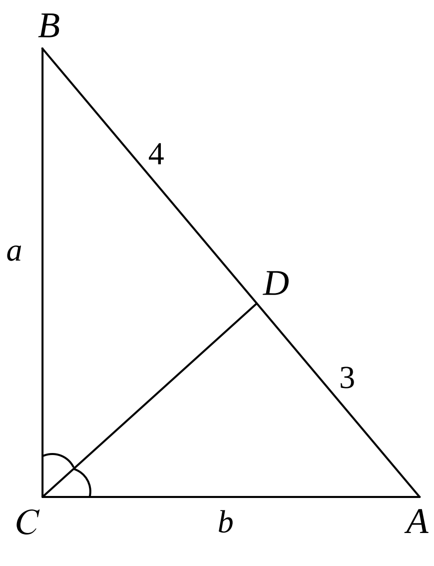


Если *BD* – биссектриса внешнего угла треугольника *ABC*, то $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

Доказательство аналогичное.

Задачи системы:

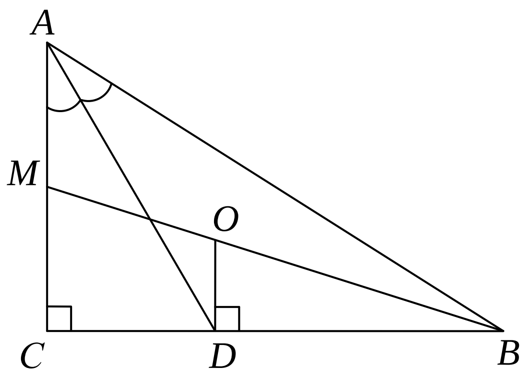
Задача 1. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки 3 и 4. Найдите площадь треугольника.



Р е ш е н и е. Пусть $AC=b,\ BC=a$. Тогда по свойству биссектрисы $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$, а по теореме Пифагора $a^2+b^2=49$. Решая систему получим: $a=\frac{28}{5},\ b=\frac{21}{5}$. Вычисляя площадь треугольника по формуле $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$, получим $S=11{,}76$.

О т в е т: 11,76.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла. Отрезок, соединяющий ее с основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найдите острые углы треугольника.



Р е ш е н и е. Пусть AD – биссектриса прямоугольного треугольника ABC.

Точка O – точка пересечения медиан. Тогда по условию задачи $OD \perp BC$.

По свойству медиан $\frac{BO}{OM} = \frac{2}{1}$.

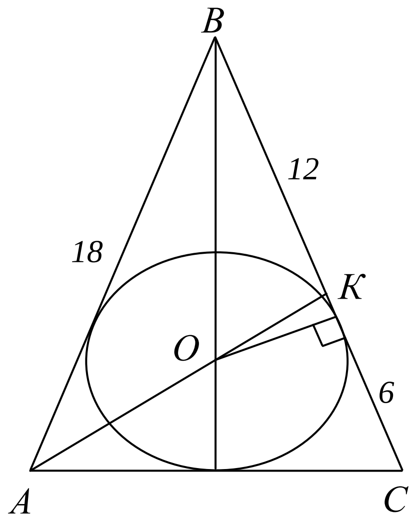
По теореме Фалеса $\frac{BO}{OM} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$.

Так как AD – биссектриса, то $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{1}$.

Так как гипотенуза AB в два раза больше катета AC, то $\angle B = 30^0$. Следовательно, $\angle A = 60^0$.

О т в е т: 30^0; 60^0.

Задача 3. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность с центром O. Луч AO пересекает сторону BC в точке K, причем $CK = 6$, $BK = 12$. Найдите периметр треугольника ABC.



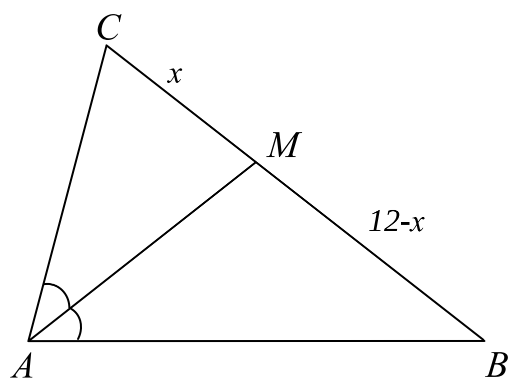
Р е ш е н и е. Так как O – центр вписанной окружности, то AK – биссектриса треугольника ABC. Тогда $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$. Имеем $\frac{12}{6} = \frac{18}{AC}$,

$AC = 9$.

$P = 45$.

О т в е т: 45.

Задача 4. В окружность радиуса $4\sqrt{3}$ см вписан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^0$, а сторона AB в два раза больше стороны AC. В треугольнике проведена биссектриса AM. Найдите длину отрезка CM.



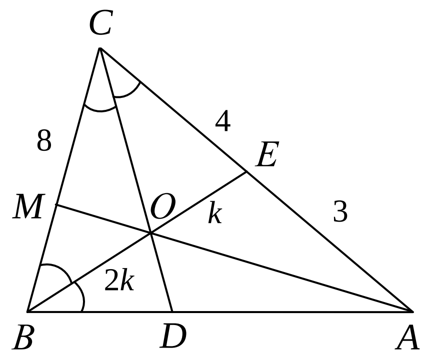
Р е ш е н и е. AM – биссектриса треугольника ABC. Тогда $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

Чтобы воспользоваться свойством биссектрисы, необходимо найти длину стороны BC. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$. Отсюда $BC = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$.

Пусть $CM = x$, тогда $BM = 12 - x$. Имеем $\frac{x}{12-x} = \frac{1}{2}$, откуда $x = 4$.

О т в е т: 4.

Задача 5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE, которую центр O вписанной окружности делит в отношении $BO:OE = 2$. Найдите AB, если $AC = 7$, $BC = 8$.



Р е ш е н и е. Так как O – центр вписанной окружности, то AM и CD – биссектрисы.

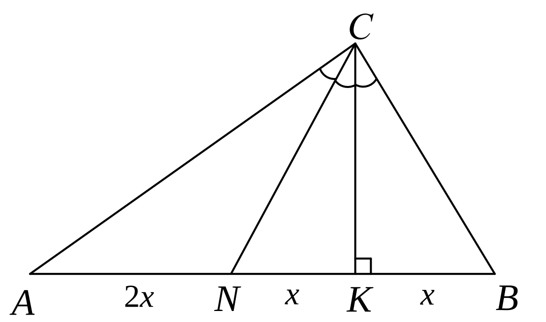
По свойству биссектрисы треугольника BCE $\frac{BO}{OE} = \frac{BC}{CE} = \frac{2}{1}$, $\frac{8}{CE} = \frac{2}{1}$, $CE = 4$.

Следовательно, $AE = 3$.

По свойству биссектрисы треугольника ABE $\frac{BO}{OE} = \frac{AB}{AE} = \frac{2}{1}$, $\frac{AB}{3} = \frac{2}{1}$, $AB = 6$.

О т в е т: 6.

Задача 6. Найдите стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из одного угла, делят его на три равные части, а длина медианы равна 10.



Р е ш е н и е. Пусть CN – медиана, а CK – высота.

Так как CK – высота и биссектриса, то треугольник CNB равнобедренный, следовательно, $BC = CN = 10$ и $NK = BK$.

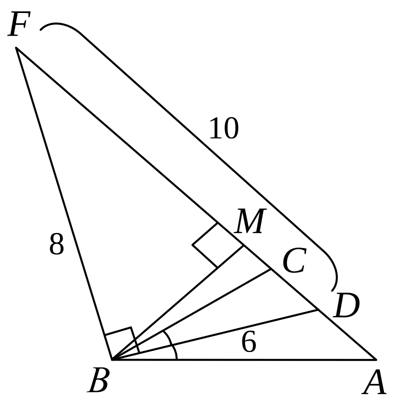
$AN = NB$, следовательно, $AN : NK = 2:1$.

CN – биссектриса в треугольнике ACK, следовательно, $AC : CK = 2:1$.

Треугольник ACK – прямоугольный, поэтому $\angle A = 30°$, $\angle ACK = 60°$, $\angle ACB = 90°$, $AB = 20$, $AC = \sqrt{400-100} = 10\sqrt{3}$.

О т в е т: $10\sqrt{3}$.

Задача 7. Биссектриса BD внутреннего угла треугольника ABC равна 6, а биссектриса BF смежного с ним угла равна 8. Найдите площадь треугольника ABC, если $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$.



Р е ш е н и е. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $BF \perp BD$.

$FD = 10$ по теореме Пифагора.

По свойству биссектрисы $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{2}$.

Пусть $AD = x$, тогда $DC = \frac{2}{3}x$, $AF = 10 + x$, $FC = 10 - \frac{2}{3}x$.

Имеем $\frac{10+x}{10-\frac{2}{3}x} = \frac{3}{2}$, $x = 2{,}5$.

$AC = x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}x = \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{6}$.

Чтобы найти площадь треугольника ABC необходимо знать длину высоты BM, проведенной к стороне AC. Из треугольника BDF найдем $\sin\angle BDF = 0{,}8$. Тогда $BM = BD \cdot \sin\angle BDF$, $BM = 6 \cdot 0{,}8 = 4{,}8$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot BM$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{26}{6}\cdot\frac{24}{5} = 10$.

О т в е т: 10.

Задачи для самостоятельного решения

1. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

О т в е т: 54.

2. В треугольнике BCE $\angle C = 60^0$, $CE : BC = 3:1$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите KE, если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.

О т в е т: 18.

3. Дан треугольник ABC. Его высота BD равна 30. Из основания E биссектрисы AE опущен перпендикуляр EF на сторону AC. Найдите длину этого перпендикуляра, если $AB : AC = 7:8$.

О т в е т:16.

4. В треугольнике ABC из вершины B проведена высота BD и биссектриса BL. Найдите площадь треугольника BLD, если известны длины сторон треугольника ABC: $AB = 6{,}5$ см; $BC = 7{,}5$ см; $AC = 7$ см.

О т в е т: 2,25.

5. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Найдите площадь треугольника ADC, если $AC = 5$, $AB = 6$, $BC = 7$.

О т в е т: $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

6. В треугольнике ABC $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Найдите отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B.

О т в е т: 1:2.

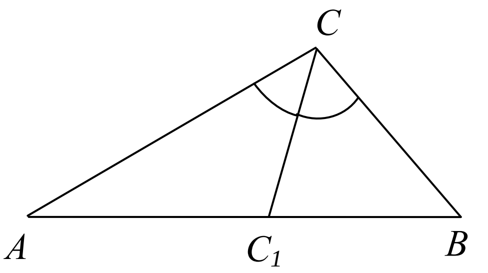
7. Основание равнобедренного треугольника равно 8, а боковая сторона 12. Найдите длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

О т в е т: 4,8.

Длина биссектрисы

Ключевая задача. Докажите, что если две стороны треугольника равны a и b, угол между ними равен γ, то длина биссектрисы, проведенной к третьей стороне, может быть вычислена по формуле: $l = \dfrac{2ab \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Доказательство. Пусть CC_1 – биссектриса $\angle C$ треугольника ABC.



Тогда $S_{ABC} = S_{ACC_1} + S_{BCC_1}$ или $\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bl\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}al\sin\frac{\gamma}{2}$. После несложных преобразований получим $l = \dfrac{2ab \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Задачи системы:

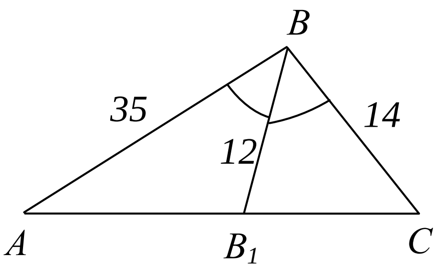
Задача 1. В треугольнике ABC выполняется соотношение $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_A}$. Найдите градусную меру угла A.

Решение. По ключевой задаче $l_A = \dfrac{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$, а $\dfrac{1}{l_A} = \dfrac{b+c}{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

Так как в треугольнике ABC выполняется соотношение $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_A}$, то $\dfrac{b+c}{bc} = \dfrac{b+c}{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Откуда $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{\alpha}{2} = 60^0$, а $\alpha = 120^0$.

Ответ: 120^0.

Задача 2. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.



Решение. Пусть BB_1 – биссектриса угла ABC. Тогда $BB_1 = 12$, $AB = 35$ и $BC = 14$.

По ключевой задаче $BB_1 = \dfrac{2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABB_1}{AB + BC}$.

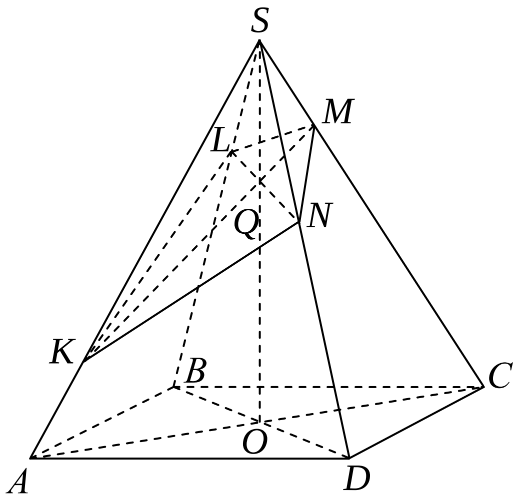
Отсюда $\cos\angle ABB_1 = \dfrac{3}{5}$.

Найдем синус угла ABC: $\sin\angle ABC = 2.\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC,\ S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 35\cdot 14\cdot\frac{24}{25} = 235{,}2.$$

О т в е т: 235,2

Задача 3. Плоскость отсекает от боковых ребер *SA*, *SB*, *SC* правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* отрезки *SK*, *SL*, *SM*, причем $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{3}SC$. Длина бокового ребра равна a. Найдите длину отрезка *SN*, отсекаемого этой плоскостью на ребре *SD*.



Р е ш е н и е. SQ – биссектриса углов *KSM* и *LSN*.

Пусть $\angle KSM = \angle LSN = 2\varphi$. Тогда по ключевой задаче:

Из треугольника *KSM*

$$SQ = \frac{2\cdot SK\cdot SM\cdot\cos\varphi}{SK+SM},$$

$$SQ = \frac{2\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{3}a\cdot\cos\varphi}{\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a} = \frac{4}{9}a\cos\varphi;$$

из треугольника *LSN* $SQ = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}a\cdot SN\cdot\cos\varphi}{\frac{1}{2}a+SN}$. Приравнивая, получим

$$SN = \frac{2}{5}a.$$

О т в е т: $\frac{2}{5}a$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан треугольник со сторонами 4, 8 и 9. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

О т в е т: $\sqrt{14}$.

2. Стороны равнобедренного треугольника 10 и 2,5. Найдите длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне треугольника.

О т в е т: 3.

3. В треугольнике ABC $AB = 6$, $AC = 12$, длина биссектрисы угла A равна 4. Найдите длину стороны BC.

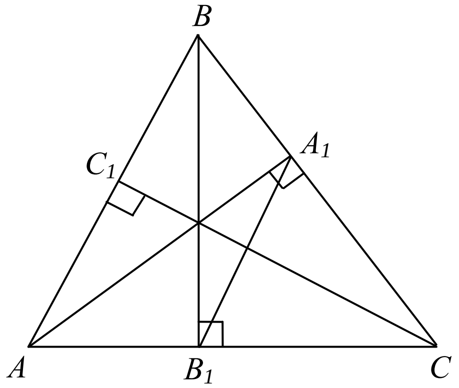
О т в е т: $6\sqrt{7}$.

4. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 30^0$, $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найдите площадь треугольника ABD.

О т в е т: 2,4.

Треугольник, образованный основаниями высот данного остроугольного треугольника

Ключевая задача. AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что а) треугольники AA_1C и BB_1C подобны; б) треугольники ABC и A_1B_1C подобны и $k = \cos\angle C$.



Д о к а з а т е л ь с т в о. Треугольники AA_1C и BB_1C подобны по двум углам.

Из этого следует, что $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C}{B_1C}$ или $\frac{AC}{A_1C} = \frac{BC}{B_1C}$. Треугольники ABC и A_1B_1C подобны, так как $\frac{AC}{A_1C} = \frac{BC}{B_1C}$ и $\angle C$ – общий и $\frac{A_1C}{AC} = \cos\angle C$.

Задачи системы:

Задача 1. AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Треугольники ABC и A_1B_1C подобны, следовательно, $\angle BAC = \angle B_1A_1C = \alpha$.

Треугольники ABC и A_1BC_1 подобны, следовательно, $\angle BAC = \angle BA_1C_1 = \alpha$.

$\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A = 90^0 - \alpha$. Следовательно, AA_1 – биссектриса $\angle B_1A_1C_1$.

Задача 2. AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} = 2S_{ABC} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

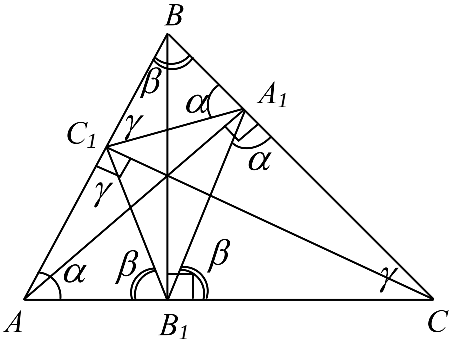
Д о к а з а т е л ь с т в о. $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \sin\angle A_1$.

$A_1C_1 = AC \cdot \cos\beta$, $A_1B_1 = AB \cdot \cos\gamma$, $\angle A_1 = 180^0 - 2\alpha$.

Имеем $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \sin 2\alpha$ или $S_{A_1B_1C_1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$.

Откуда $S_{A_1B_1C_1} = 2S_{ABC} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

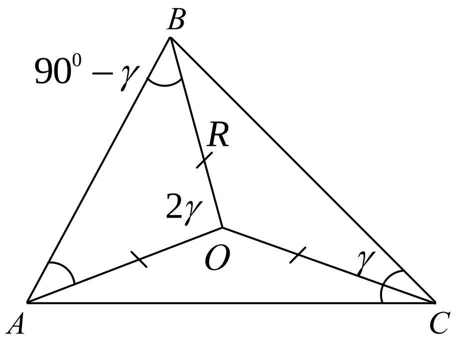
Задача 3. AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что отношение периметров треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равно $\frac{r}{R}$, где r и R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей около треугольника ABC.



Р е ш е н и е. Так как $A_1B_1 = AB \cdot \cos\gamma$, $B_1C_1 = BC \cdot \cos\alpha$ и $A_1C_1 = AC \cdot \cos\beta$, то $P_{A_1B_1C_1} = AB \cdot \cos\gamma + BC \cdot \cos\alpha + AC \cdot \cos\beta$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r$. С другой стороны $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC}$, где O – центр описанной около треугольника ABC окружности.

Найдем площади треугольников AOB, BOC и AOC.



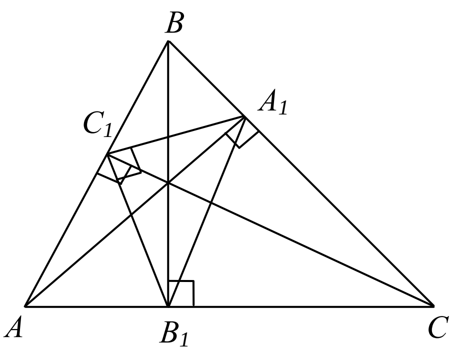
$S_{AOB} = \frac{1}{2} R \cdot AB \cdot \sin\angle ABO = \frac{1}{2} R \cdot AB \cdot \cos\gamma$.

Анологично, $S_{BOC} = \frac{1}{2} R \cdot BC \cdot \cos\alpha$, $S_{AOC} = \frac{1}{2} R \cdot AC \cdot \cos\beta$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} R \cdot (AB \cdot \cos\gamma + BC \cdot \cos\alpha + AC \cdot \cos\beta) = \frac{1}{2} R \cdot P_{A_1B_1C_1}.$$

Приравнивая площади, получим $\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = \frac{r}{R}$.

Задача 4. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите стороны треугольника.



Р е ш е н и е. Так как $17^2 = 15^2 + 8^2$, то треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный. Следовательно, $2\gamma = 90^0$, $\gamma = 45^0$.

$AB = \frac{A_1B_1}{\cos\gamma}$, $AB = 17\sqrt{2}$.

$\cos(180^0 - 2\beta) = \frac{15}{17}$, $\cos 2\beta = \frac{15}{17}$.

Используя формулу понижения степени $\cos^2\beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2}$, найдем

$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$. $AC = \frac{A_1C_1}{\cos\beta}$, $AC = 2\sqrt{17}$.

Рассуждая аналогично, можно найти сторону *BC*. $\cos\left(180^0 - 2\alpha\right) = \frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $BC = \frac{B_1C_1}{\cos\alpha} = 3\sqrt{34}$.

О т в е т: $17\sqrt{2}$; $2\sqrt{17}$; $3\sqrt{34}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Высота *AH* и *CK* остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *D*, причем $AK = 13$, $KB = 12$, $AH = 20$. Найдите сторону *BC*.

О т в е т: 20.

2. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты AA_1, BB_1, и CC_1. Докажите, что $\angle ACC_1 = \angle AA_1B_1$.

3. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12, а боковой стороны – 18. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Найдите длину отрезка с концами в основаниях высот.

О т в е т: $\frac{28}{3}$.

4. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника C_1BA_1.

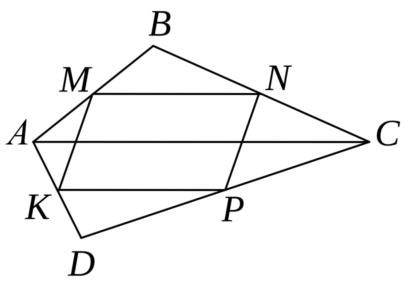
О т в е т: $\frac{1}{2} tg\alpha$.

5. В остроугольном треугольнике *ABC* $\angle BAC = \alpha$. На стороне *BC* как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны *AB* и *BC* соответственно в точках *P* и *Q*. Найдите отношение площадей треугольников *ABC* и *APQ*.

О т в е т: $\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон данного четырехугольника

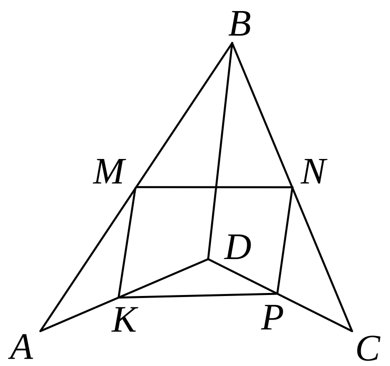
Ключевая задача. Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

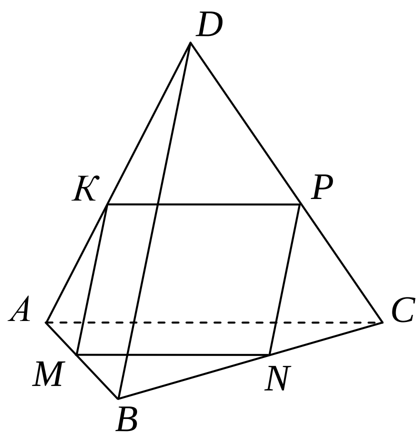


Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть *ABCD* – выпуклый четырехугольник. *M, N, P, K* – середины сторон *AB, BC, CD* и *AD* соответственно. Отрезок *MN* параллелен диагонали *AC* и равен ее половине по свойству средней линии.

Аналогично, отрезок *PK* параллелен *AC* и равен ее половине. Следовательно, отрезки *MN* и *PK* равны и параллельны. По признаку *MNPK* – параллелограмм.

Для невыпуклого и пространственного четырехугольников доказательство аналогичное.





Следствия:

1. Если *ABCD* – выпуклый четырехугольник и *M, N, P, K* – середины его сторон *AB, BC, CD* и *AD* соответственно, то $S_{MNPK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Треугольники *MBN* и *ABC* подобны, следовательно, $S_{MBN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$. Аналогично, $S_{KDP} = \frac{1}{4} S_{ADC}$. $S_{MBN} + S_{KDP} = \frac{1}{4}\left(S_{ABC} + S_{ADC}\right) = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Аналогично, $S_{AMK} = \frac{1}{4} S_{ABD}$, $S_{NCP} = \frac{1}{4} S_{BCD}$, $S_{AMK} + S_{NCP} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

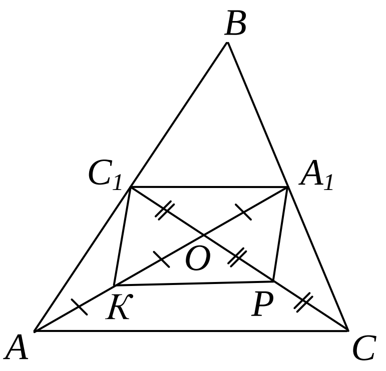
Имеем, $S_{MNPK} = S_{ABCD} - \left(S_{MNB} + S_{KDP} + S_{AMK} + S_{NCP}\right) = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

2. Середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.
3. Середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.
4. Середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Осмыслению ключевой задачи будут способствовать вопросы: Каким условиям должны удовлетворять диагонали данного четырехугольника, чтобы середины его сторон были вершинами прямоугольника, ромба, квадрата? Докажите, что середины сторон трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями являются вершинами прямоугольника. Составьте обратную задачу. Верна ли она?

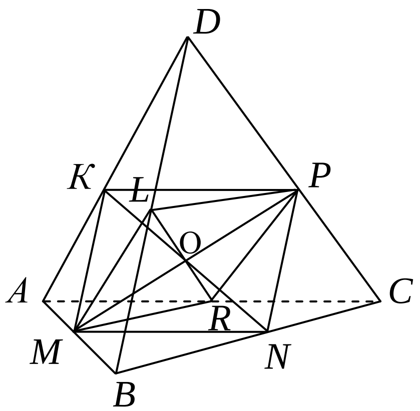
Задачи системы:

Задача 1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Доказательство. Пусть медианы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Отметим точки K и P – середины отрезков AO и CO. Тогда точки K, P, C_1 и A_1 середины сторон невыпуклого четырехугольника $ABCO$. Следовательно, по ключевой задаче KPC_1A_1 – параллелограмм. Его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Тогда $AO:OA_1 = CO:OC_1 = 2:1$. Рассуждая аналогично, докажем, что медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Q и $AQ:QA_1 = BQ:QB_1 = 2:1$. Так как отрезок AA_1 делится в отношении 2:1, считая от точки A, однозначно, то точки O и Q совпадают. Следовательно, медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

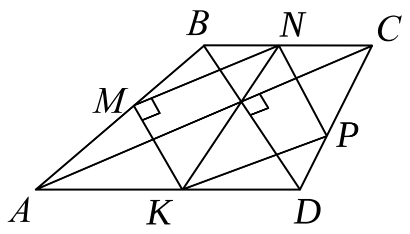
Задача 2. Докажите, что отрезки, соединяющие середины сторон скрещивающихся ребер тетраэдра пересекаются в одной точке.



Доказательство. По ключевой задаче $MKPN$ и $MLPR$ – параллелограммы. Их диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Задача 3. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, длина одной из них равна 6. Длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 5. Найдите площадь трапеции.

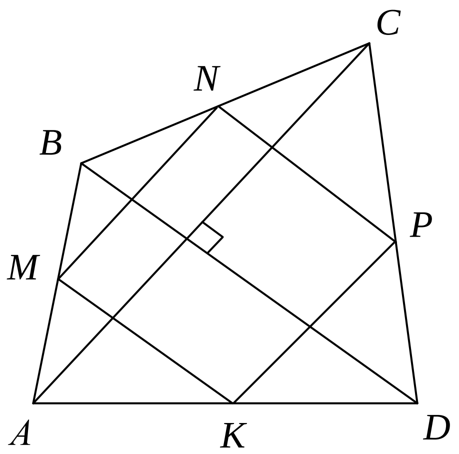
Решение. Пусть M и P – середины боковых сторон трапеции. Тогда по ключевой задаче $MNPK$ – прямоугольник. Так



как $AC = 6$, то $MN = 3$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника MNK $MK = 4$. Тогда $S_{MNPK} = 12$, а $S_{ABCD} = 24$.

О т в е т: 24.

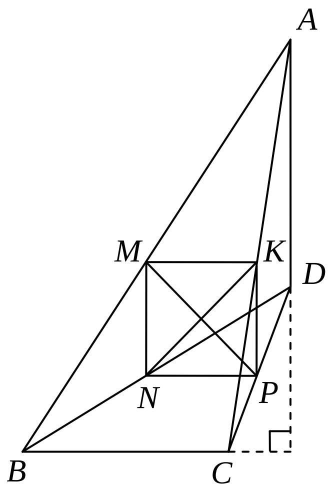
Задача 4. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей 2 и 4. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон равны.



Р е ш е н и е. По ключевой задаче *MNPK* – параллелограмм. Так как его диагонали равны, то *MNPK* – прямоугольник. Диагонали данного выпуклого четырехугольника параллельны сторонам прямоугольника и, следовательно, перпендикулярны. Найдем площадь выпуклого четырехугольника как половину произведения диагоналей на синус угла между ними. $S_{ABCD} = 4$.

О т в е т: 4.

Задача 5. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* длина отрезка, соединяющего середины сторон *AB* и *CD*, равна одному метру. Прямые *BC* и *AD* перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей *AC* и *BD*.



Р е ш е н и е. Обозначим через *M, N, P, K* – середины сторон *AB, BD, CD* и *AC* соответственно. Тогда $MK \parallel NP \parallel BC$ как средние линии треугольников *BAC* и *BDC*. Аналогично, $MN \parallel KP \parallel AD$. Так как прямые *BC* и *AD* перпендикулярны, то параллельные им прямые *MK* и *MN* также перпендикулярны. Следовательно, параллелограмм *MNPK* является прямоугольником и $KN = MP = 1$.

О т в е т: 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что отрезки, соединяющие середины его смежных сторон, равны 2 и 3, а угол между ними 30^0.

О т в е т: 6.

2. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны 3 и 4, а длина одной из диагоналей четырехугольника равна 5.

О т в е т: 12.

3. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что отрезки, соединяющие середины его смежных сторон, равны 3 и 4, а длина одного из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равна 5.

О т в е т: 24.

4. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

О т в е т: 25.

5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST. Пусть M и N – середины отрезков PQ и ST. Найдите длину MN.

О т в е т: 0,25.