I. Решите предложенные задания.

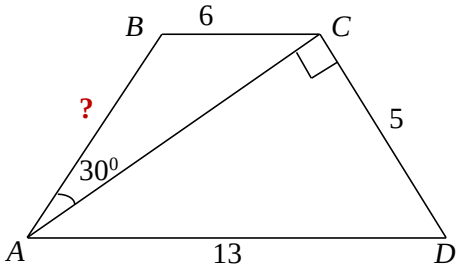
1. В магазине продаются ёлочные гирлянды длиной по 50, 65 и 90 см. стоимостью 200, 260 и 360 рублей соответственно. У Кати есть некоторая сумма денег для покупки ёлочных украшений. Для покупки 4-х гирлянд, каждая из которых имеет длину 65 см, ей не хватит денег. Если же приобрести 5 гирлянд, каждая из которых имеет длину 50 см, денег достаточно. При покупке какого наименьшего количества гирлянд по 90 см, Кате не хватит имеющейся у неё денежной суммы?
2. В некоторой стране 2021 город. Правитель страны издал указ о строительстве железных дорог между городами так, чтобы из каждого города выходило по пять дорог. Смогут ли железнодорожники исполнить указ Правителя?
3. Для проведения медицинского осмотра коллектив школьников из 40 человек строится по росту (среди учащихся нет таких, которые бы имели одинаковый рост), и затем разбивается медиками на 4 подгруппы. Первая подгруппа идёт на осмотр к терапевту, вторая - к стоматологу, третья - к отоларингологу, четвёртая - в процедурный кабинет. При этом к каждому специалисту отправляется хотя бы один ученик. Сколькими способами можно произвести разделение на подгруппы?
4. Решите в натуральных числах уравнение $n^2 + n = 6m - 2$, где m и n - натуральные.
5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x = tgy, \\ \cos x = ctgy. \end{cases}$
6. Дан квадрат со стороной 1. В квадрате расположен некий четырёхугольник (вершины лежат внутри квадрата). Может ли значение, равное сумме длин всех сторон четырёхугольника быть больше 5?
7. Существует ли число, делящееся на 2021, в десятичной записи которого встречаются только единицы?

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство). В случае некорректного условия, прокомментируйте предложенное решение.

8. Автобус выехал из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 180 км. За каждый час автобус преодолевал 60 км. Мог ли автобус приехать в пункт B через 2 часа 40 минут?
   Ответ: не мог
   Решение: Так как средняя скорость автобуса 60 км/ч, то 180 км автобус преодолеет за 3 часа, что больше 2 часов 40 минут.
9. Докажите, что число, записанное с помощью 36-ти единиц, делится на 27.

Доказательство. Чтобы число делилось на 27, необходимо, чтобы оно делилось на 3 и на 9. Сумма цифр предложенного числа делится на 3, и на 9. Следовательно, число делится на 27.

10. Решите задачу по данным на чертеже, где *ABCD* – трапеция.



Решение.

Т.к. данный четырёхугольник - трапеция, то $\angle CAD = \angle BCA$ как накрест лежащие при параллельных прямых. Следовательно, $\sin\angle CAD = \sin\angle BCA = \frac{5}{13}$. По т. синусов для $\square ABC$ имеем: $\frac{\sin\angle BAC}{BC} = \frac{\sin\angle BCA}{AB}$, $\frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{5}{13}}{AB}$,

$AB = \frac{5}{13}\cdot\frac{12}{1} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}$.

Ответ: $4\frac{8}{13}$.

Задания и решения

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. *Решение каждой задачи оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи.* В случаях, не предусмотренных прямо дополнительными указаниями по проверке и оценке задачи, её решение оценивается по следующим общим правилам:

Оценка	*За что ставится*
7	Верное решение
6	Верное решение с недочётами
4-5	Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки
1-3	Решение в целом неверно, но содержит более или менее существенное продвижение в верном направлении
0	Решение неверно или отсутствует

Решение считается *неполным* в следующих случаях:

- если оно содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- если оно при верной общей схеме рассуждений содержит *пробелы*, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- если оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых разобрана, но некоторые, *аналогичные разобранным*, упущены.

При расхождении между общими и дополнительными указаниями применяются дополнительные. При явном противоречии между дополнительными указаниями и реально сложившейся ситуацией жюри олимпиады имеет право изменить данные в указаниях критерии оценок.

2. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за "нерациональность" решения (кроме отдельных редких случаев, когда это прямо предусмотрено дополнительными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки и т.п.***

3. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, вычислительные ошибки в *невычислительной* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочётам.

1. В магазине продаются ёлочные гирлянды длиной по 50, 65 и 90 см. стоимостью 200, 260 и 360 рублей соответственно. У Кати есть некоторая сумма денег для покупки ёлочных украшений. Для покупки 4-х гирлянд, каждая из которых имеет длину 65 см, ей не хватит денег. Если же приобрести 5 гирлянд, каждая из которых имеет длину 50 см, денег

достаточно. При покупке какого наименьшего количества гирлянд по 90 см, Кате не хватит имеющейся у неё денежной суммы?

Ответ: **Три гирлянды.**

Решение. Из условия видно, что имеющаяся у Кати денежная сумма больше 200×5 = 1000 рублей, но меньше 260×4 = 1040 рублей. Поэтому две гирлянды по 90 см она может купить (ибо 360×2 = 720 < 1000), но уже третью она купить не сможет (ибо 360×3 = 1080 > 1040).

2. В некоторой стране 2021 город. Правитель страны издал указ о строительстве железных дорог между городами так, чтобы из каждого города выходило по пять дорог. Смогут ли железнодорожники исполнить указ Правителя?

Ответ: Нет

Решение: Посчитаем общее количество дорог: 2021×5 = 10105 - нечётное число. А так как каждая дорога посчитана дважды, число дорог должно быть чётным.

3. Для проведения медицинского осмотра коллектив школьников из 40 человек строится по росту (среди учащихся нет таких, которые бы имели одинаковый рост), и затем разбивается медиками на 4 подгруппы. Первая подгруппа идёт на осмотр к терапевту, вторая - к стоматологу, третья - к отоларингологу, четвёртая - в процедурный кабинет. При этом к каждому специалисту отправляется хотя бы один ученик. Сколькими способами можно произвести разделение на подгруппы?

Ответ: C_{39}^{3} или 9139.

Решение: В решении используется метод шаров и перегородок: 40 шаров и три перегородки для деления на 4 части. Для трёх перегородок возможно предложить 39 мест. Т.о. имеем $C_{39}^{3}=\frac{39!}{36!\cdot 3!}=\frac{37\cdot 38\cdot 39}{6}=9139$

4. Решите в натуральных числах уравнение $n^2+n=6m-2$, где m и n - натуральные.

Ответ: **Решений нет**

Решение: $n^2+n=6m-2,$ $n^2+n-(6m-2)=0,$ $D=1+4\cdot(6m-2)=24m-7.$ Дискриминант при делении на 3 даёт остаток 2, а, следовательно, он не может быть полным квадратом. Что указывает на невозможность получить натуральные решения.

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sin x=tgy,\\ \cos x=ctgy.\end{cases}$

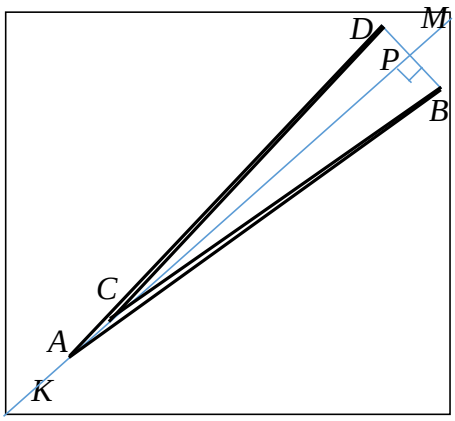
Ответ. Нет решений.

Первое решение. Перемножив данные равенства, получаем, что $\sin x\cdot\cos x=\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{ctg} y=1$. Но $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\le 1/2$. Противоречие.

Второе решение. Поскольку $\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{ctg} y=1$, хотя бы одно из чисел $\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{ctg} y$ по модулю не меньше 1. Так как $\sin x$ и $\cos x$ по модулю не превосходят 1, модуль одного из чисел $\sin x$ и $\cos x$ должен быть равен 1. Тогда другое из них должно быть равно нулю. Значит, нулю

должно быть равно и одно из значений $\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{ctg} y$. Но тогда другое из этих значений не определено. Противоречие.

6. Дан квадрат со стороной 1. В квадрате расположен некий четырехугольник (вершины лежат внутри квадрата). Может ли значение, равное сумме длин всех сторон четырехугольника быть больше 5?



Ответ: да

Решение. Заметим, что длина диагонали квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$, при этом $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Построим пример четырехугольника, периметр которого больше 5. Для этого на диагонали KM квадрата отметим точки C и P таким образом, чтобы $CP > \frac{5}{4}$ (это возможно, так как $KM = \sqrt{2} > 1{,}4 > \frac{5}{4}$). Отметим на отрезке KC точку A; проведем через точку P перпендикуляр к прямой KM и отметим на нем точки B и D внутри квадрата по разны стороны от KM. Мы утверждаем, что все стороны четырёхугольника $ABCD$ больше $\frac{5}{4}$.

В самом деле

$$BC > PC > \frac{5}{4},\ CD > PC > \frac{5}{4},$$

так как наклонная длиннее перпендикуляра; далее аналогично

$$BA > PA > CP > \frac{5}{4}, \quad AD > AP > PC > \frac{5}{4}.$$

Таким образом, все стороны четырёхугольника больше $\frac{5}{4}$, откуда периметр больше $4 \cdot \frac{5}{4} = 5$, что и требовалось.

Дополнительные критерии	баллы
Верный ответ без примера, только на уровне рассуждений	3

7. Существует ли число, делящееся на 2021, в десятичной записи которого встречаются только единицы?

Ответ. Да существует.

Решение. Предположим, что среди чисел, записываемых только единицами, нет чисел, которые делятся на 2021. Рассмотрим остатки при делении на 2021 чисел 1, 11, 111, …, $\underbrace{111\ldots111}_{2021\text{ единица}}$. Если один из остатков равен 0, то искомое число найдено. Если ни один из остатков не равен 0, то эти остатки могут быть равны 1, 2, …, 2020 – всего 2020 вариантов. Так как чисел 2021, а остатков 2020, то у каких-то двух чисел остатки будут одинаковы. Пусть у чисел $\underbrace{111\ldots111}_{m\text{ единиц}}$ и $\underbrace{111\ldots111}_{n\text{ единиц}}$ ($m > n$) будут одинаковые остатки при делении на 2021. Тогда разность этих чисел, равная

$$\underbrace{111\ldots111}_{m\text{ единиц}} - \underbrace{111\ldots111}_{n\text{ единиц}} = \underbrace{111\ldots111}_{m-n\text{ единиц}}\underbrace{000\ldots000}_{n\text{ нулей}} = \underbrace{111\ldots111}_{m-n\text{ единиц}} \cdot 10^n,$$

будет делиться на 2021. Заметим, что НОД (10^n; 2021) = 1. Из этого и из того, что $\underbrace{111\ldots111}_{m-n\text{ единиц}} \cdot 10^n$ делится на 2021 следует, что $\underbrace{111\ldots111}_{m-n\text{ единиц}}$ делится на 2021.

Дополнительные критерии	баллы

Доказано существование такого числа /приведён пример такого числа, и доказана делимость (или проведены непосредственные вычисления)	7
В ходе доказательства не учтён факт взаимной простоты чисел 2021 и 10^n	4
Приведён верный пример такого числа, но делимость не показана (с помощью непосредственных вычислений или доказательства)	4

8. Автобус выехал из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми 180 км. За каждый час автобус преодолевал 60 км. Мог ли автобус приехать в пункт *B* через 2 часа 40 минут?

Ответ: не мог

Решение: Так как средняя скорость автобуса 60 км/ч, то 180 км автобус преодолеет за 3 часа, что больше 2 часов 40 минут.

Решение.

1. Задача корректна.

2.**Ответ**: мог

Автобус какую-то часть часа мог двигаться, а другую стоять. Например,
40 минут – движение, автобус проезжает 60 км,
20 минут – остановка,
40 минут – движение, автобус проезжает 60 км,
20 минут – остановка,
40 минут – движение, автобус проезжает 60 км.
В этом случае выполнены все условия задачи. Пример показывает, что автобус мог приехать в пункт *B*.

9. Докажите, что число, записанное с помощью 36-ти единиц, делится на 27.

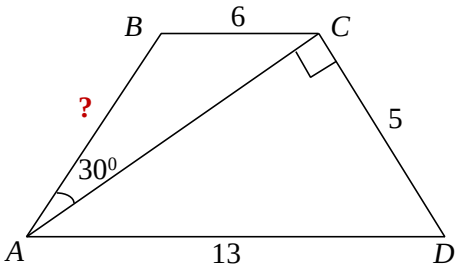
Доказательство. Чтобы число делилось на 27, необходимо, чтобы оно делилось на 3 и на 9. Сумма цифр предложенного числа делится на 3, и на 9. Следовательно, число делится на 27.

Решение.

1. Условие задачи некорректно, т.к. предложенное число не делится на 27.
2. Для делимости на 27 необходимы делимость и на 3, и на 9. Т.е. в ходе доказательства надо было показать делимость на одно из чисел, а потом показать, что результат деления делится на другое число.

Дополнительные критерии	**баллы**
Показана некорректность **и** указано на ошибочное рассуждение	7
Показана некорректность **или** указано на ошибочное рассуждение	4

10. Решите задачу по данным на чертеже, где *ABCD* – трапеция.



Решение. Т.к. данный четырёхугольник - трапеция, то $\angle CAD = \angle BCA$ как накрест лежащие при параллельных прямых. Следовательно, $\sin\angle CAD = \sin\angle BCA = \frac{5}{13}$. По т. синусов для $\triangle ABC$ имеем: $\frac{\sin\angle BAC}{BC} = \frac{\sin\angle BCA}{AB}$,

$$\frac{\frac{1}{2}}{6}=\frac{\frac{5}{13}}{AB},\ AB=\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{1}=\frac{60}{13}=4\frac{8}{13}.$$

Ответ: $4\frac{8}{13}$

Решение.

1. Условие предложенной задачи не является корректным, т.к. $\angle B = 150^0 - \angle CAD$, следовательно

$$\sin\angle B=\sin\left(150^0-\angle CAD\right)=\sin 150^0\cdot\cos\angle CAD-\cos 150^0\cdot\sin\angle CAD$$

$$\sin\angle B=\sin\left(150^0-\angle CAD\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{13}=\frac{12-5\sqrt{3}}{26}.$$

По т. синусов для ΔABC $\frac{\sin\angle B}{12}=\frac{\sin 30^0}{6}$, следовательно, $\sin\angle B=1$.

Очевидно, что такая трапеция не существует.

2. Если бы данные на чертеже были бы корректными, предложенное решение было бы верным.

Дополнительные критерии	**баллы**
Показана некорректность **и** есть комментарий о верности предложенного решения при условии корректности задания	7
Показана только некорректность, **нет** комментария о том, что решение было бы верным	5
Не показана некорректность условия, но **есть** комментарий о верности решения	2