Решение рациональных, показательных и логарифмических неравенств.

Щеренко Людмила Михайловна
учитель МКОУ СОШ №1

Наибольшие трудности на ЕГЭ вызывают показательные и логарифмические неравенства. Учащиеся забывают анализировать характер моно точности функций, стоящих в левой и правой части неравенства ,при этом приходят к неравенствам, заведомо не равносильным исходным.

Например: $(\frac{1}{3})^x \geq 3^{2x+1}$, приводят к виду $(\frac{1}{3})^x \geq (\frac{1}{3})^{2x+1}$, а далее пишут $x \geq -2x-1$.

Что приводит неверному неравенство, т.к не учтено убывание функций $y = (\frac{1}{3})^x$.

На самом деле исходное неравенство равносильно неравенству $x \leq 2x+1$.

При решение неравенств обязательно надо учитывать область допустимых значений переменных.

Справедлива теорема.

Пусть D - область определения неравенства $f(\varphi_1(x)) < f(\varphi_2(x))$ и пусть функция f строго монотонна на множестве $B = \varphi_{1,2}(D)$.Тогда справедливы следующие высказывания:

I. Если функция строго возрастает на множестве B,то

$$f(\varphi_1(x)) < f(\varphi_2(x)) = \left\{\begin{matrix} \varphi_1(\text{x}) < \varphi_2(\text{x}) \\ \text{x} \in D \end{matrix}\right\}$$

II . Если функция строго убывает на множестве B,то

$$f(\varphi_1(x)) < f(\varphi_2(x)) = \left\{\begin{matrix} \varphi_1(\text{x}) > \varphi_2(\text{x}) \\ \text{x} \in D \end{matrix}\right\}$$

При решении неравенства с переменными основаниями можно воспользоваться методом рационализации.

Докажите его неравенство

$\log_{p(x)} f(x) > \log_{p(x)} g(x)$,

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ p(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x) \neq 1, \\ (p(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0. \end{cases}$$

Приведём его доказательство.

Классическое решение имеет вид: $\log_{p(x)} f(x) > \log_{p(x)} g(x)$,

$$\begin{cases} p(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < p(x) < 1 \\ (f(x) < g(x), f(x) > 0 \end{cases}$$

Но решение совокупности равносильно решению неравенства

$$\begin{cases} p(x) - 1 > 0, \\ f(x) - g(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x) - 1 < 0 \\ (f(x) - g(x) < 0 \end{cases}$$

Равносильно решению неравенства

$$(p(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0$$

Рассмотрим решение неравенств разными методами.

Решение неравенств вводя новую переменную, что позволяет свести показательное или логарифмическое неравенство к рациональному.

$$\frac{\log_2 32x}{\log_2 x - 5} + \frac{\log_2 x - 5}{\log_2 32x} \geq \frac{\log_2 x^4 + 18}{\log_2 x^2 - 25}$$

$$\frac{\log_2 32x + \log_2 x}{\log_2 x - 5} + \frac{\log_2 x - 5}{\log_2 32x + \log_2 x}$$
$$\geq \frac{4\log_2 x + 18}{(\log_2 x - 5)(\log_2 x + 5)}$$

Пусть $\log_2 x = t$

$$\frac{5 + t}{t - 5} + \frac{t - 5}{5 + t} \geq \frac{4t + 18}{(t - 5)(t + 5)}$$

Приводим к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{(t-4)^2}{(t-5)(t+5)} \geq 0$$

Отмечаем точки на числовой прямой:

$t < -5, t = 4, t > 5,$

$\log_2 x < -5 \qquad \log_2 x = 4 \qquad \log_2 x > 5$

$0 < x < \dfrac{1}{32} \qquad x = 16 \qquad x > 32$

Очень важно не забыть область определения логарифмической функции $\left(0; \frac{1}{32}\right) \{16\}\{32; +\infty).$