Специфика подготовки к вузовским олимпиадам по математике

Саядян Д.Л., канд. ф.-м. наук,
старший научный сотрудник
СКИРО ПК и ПРО


ОЛИМПИАДА
«КУРЧАТОВ»
СКФУ
"45 параллель"
Олимпиада
школьников
СПбГУ
Олимпиада школьников СПбГУ
ОТРАСЛЕВАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА
РОСАТОМ
ОБЪЕДИНЕННАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ
М О О М
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Олимпиада
«Покори Воробьёвы горы!»
МАТЕМАТИКА
2013–2018
Олимпиада школьников
«Ломоносов»
2019–2020 уч. год
Математика 1 уровень
11 класс
Отборочный этап
14 октября – 21 октября 2019 года
Разбор задачи 3
VIA SCIENTIARUM
МФТИ
'21 Онлайн-этап олимпиады
«Физтех»
Зарегистрироваться
Попробуй свои силы в онлайн-этапе олимпиады
и получи путевку на заключительный этап
олимпиады «Физтех», чтобы поступить в МФТИ!

Зачем нужно готовиться к вузовским олимпиадам?

- Подготовка к олимпиадам — это глубокое изучение математики, постоянная практика решения сложных и нестандартных задач, хорошая база для дальнейшей учёбы в вузе

- Готовясь к олимпиадам, вы автоматически получаете исчерпывающую подготовку к ЕГЭ, причём на гораздо более высоком уровне.

- Диплом олимпиады обеспечит вам льготы при поступлении (как минимум 100 баллов в зачёт ЕГЭ).

- Олимпиад несколько; не получилось на одной олимпиаде — возможно, получится на другой или третьей.

- В каких то вузах результатов ЕГЭ недостаточно.

Уровни олимпиад в 2022-2023 гг.

Олимпиада	Сайт	Уровень 2022/23
Московская математическая олимпиада	ММО	Математика — 1
Турнир городов	ТурГор	Математика — 1
Московская олимпиада школьников по физике	МОШ по физике	Физика — 1
Покори Воробьёвы горы!	ПВГ	Математика — 1 Физика — 1
Ломоносов	Ломоносов	Математика — 1 Физика — 2 Механика — 2
Высшая проба	Высшая проба	Математика — 1 Физика — 2
Физтех	Физтех	Математика — 1 Физика — 1
Росатом	Росатом	Математика — 2 Физика — 1
Курчатов	Курчатов	Математика — 2 Физика — 2
Олимпиада СПбГУ	СПбГУ	Математика — 1 Физика — 2
Всесибирская открытая олимпиада школьников	Всесиб	Математика — 2 Физика — 2
Объединённая межвузовская математическая олимпиада	ОММО	Математика — 2
Интернет-олимпиада по физике	ИОФ	Физика — 1
Турнир имени М. В. Ломоносова	ТурЛом	Математика — 2 Физика — 2

Олимпиада «Ломоносов» по математике

Отборочный этап:

- 10 задач в сумме на 100 баллов.
- три с половиной часа на их решение
- проверяться будут только численные ответы

Заключительный этап:
8 задач, обычно по 15 баллов

Границы дипломов 1/2/3 степени в последние годы таковы (11 класс):

Год	1/2/3
2022	100/90/80
2021	80/70/65
2020	80/75/65
2019	90/80/70
2018	85/75/65
2017	90/80/70

Олимпиада «Покори Воробьевы горы» по математике

- проводится Московским университетом совместно с газетой «Московский комсомолец»
- проходит в два этапа: отборочный (дистанционно) и заключительный
- на заключительный этап приглашаются победители и призёры отборочного этапа, а также победители и призёры прошлогодней олимпиады
- отборочный этап имеет вид сессии, которая длится 24 часа. В течение отборочного этапа допускается провести только одну сессию; начать её можно в любой момент.

Олимпиада «Покори Воробьевы горы» по математике

Особенности: сложные задачи и высокий проходной балл

Границы дипломов 1/2/3 степени в последние годы таковы (11 класс):

Год	1/2/3
2022	95/90/80
2021	95/85/75
2020	100/90/80
2019	100/90/80
2018	95/90/85

ОММО — Объединённая межвузовская математическая олимпиада

- отборочный этап ОММО — самый либеральный из всех олимпиад
- на заключительном этапе ОММО предлагается десять задач
- для получения диплома обычно достаточно решить четыре или пять из них
- по критериям ОММО задача считается решённой, если за неё выставлен не только «+», но и «±»

ОБЪЕДИНЕННАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ОММО — Объединённая межвузовская математическая олимпиада

количество решённых задач, за которые присуждались дипломы третьей, второй и первой степени соответственно:

- 2022 — 6, 7, 8;
- 2021 — 5, 6, 7;
- 2020 — 5, 6, 7;
- 2019 — 5, 6, 7;
- 2018 — 4, 5, 6;
- 2017 — 5, 6, 7;
- 2016 — 4, 5, 7;
- 2015 — 5, 7, 9;
- 2014 — 5, 7, 9;
- 2013 — 4, 7, 9;
- 2012 — 5, 7, 9;
- 2011 — 5, 7, 9;
- 2010 — 3, 5, 7;
- 2009 — 3, 5, 7.

Олимпиада «Росатом»

- проводятся университетом МИФИ для школьников 7–11 классов
- отборочный этап включает два независимых тур:
  - очный отборочный тур (обычно в октябре)
  - отборочный интернет-тур (ноябрь — декабрь)
- участвовать можно в любом отборочном туре, засчитают лучший результат

Олимпиада «Физтех»

Олимпиада «Физтех» — это главная олимпиада для желающих поступать в МФТИ, а также одна из основных олимпиад для абитуриентов Высшей школы экономики и МГУ
Для участия в олимпиаде необходимо иметь личный кабинет
на портале abitu.net через который вы получите также доступ и к другим физтеховским олимпиадам (Столичная, Выездная, Phystech.International и т. д.)
Олимпиада «Физтех» проходит в два этапа — отборочный и заключительный.
заключительный этап предусмотрен только для учеников 9–11 классов.

Олимпиада «Физтех»

Каждая задача варианта оценивается определённым количеством баллов (скажем, 7). По критериям баллы даются за различные продвижения в решении, то есть при неполном решении можно тем не менее что-то получить за эту задачу (скажем, 2 или 4 балла).

границы дипломов первой/второй/третьей степени за последние годы. В квадратных скобках указана максимальная сумма баллов варианта олимпиады

Год	9 класс	10 класс	11 класс
2022	20/15/12 [31]	21/17/14 [30]	16/13/10 [33]
2021	26/23/20 [32]	26/23/19 [34]	21/17/13 [34]
2020	20/17/14 [33]	23/20/17 [35]	21/17/13 [35]
2019	22/18/15 [32]	25/21/17 [36]	19/16/13 [40]
2018	29/25/21 [35]	27/24/20 [39]	28/25/21 [39]
2017	30/24/18 [40]	33/27/21 [40]	32/24/18 [46]
2016	30/26/20 [32]	30/24/18 [35]	40/31/24 [48]

Олимпиада «Физтех»

Войти

Информация

Отборочный этап

Заключительный этап

Подготовка

Об олимпиаде

Дипломы прошлых лет

Контакты

МФТИ

Олимпиада «Физтех»

Регистрации до 1 декабря 23:50

Новые правила участия в онлайн-этапе олимпиады «Физтех» по физике и математике:

1. Онлайн-этап олимпиады длится **4 недели**: с 12 ноября по 4 декабря и проходит каждые выходные. Задания разные.

2. Вы можете совершить только **1 попытку** в течение недели по каждому предмету.

3. Приступить к решению можно в любой момент с **00:10** субботы до **23:50** воскресенья (время московское)

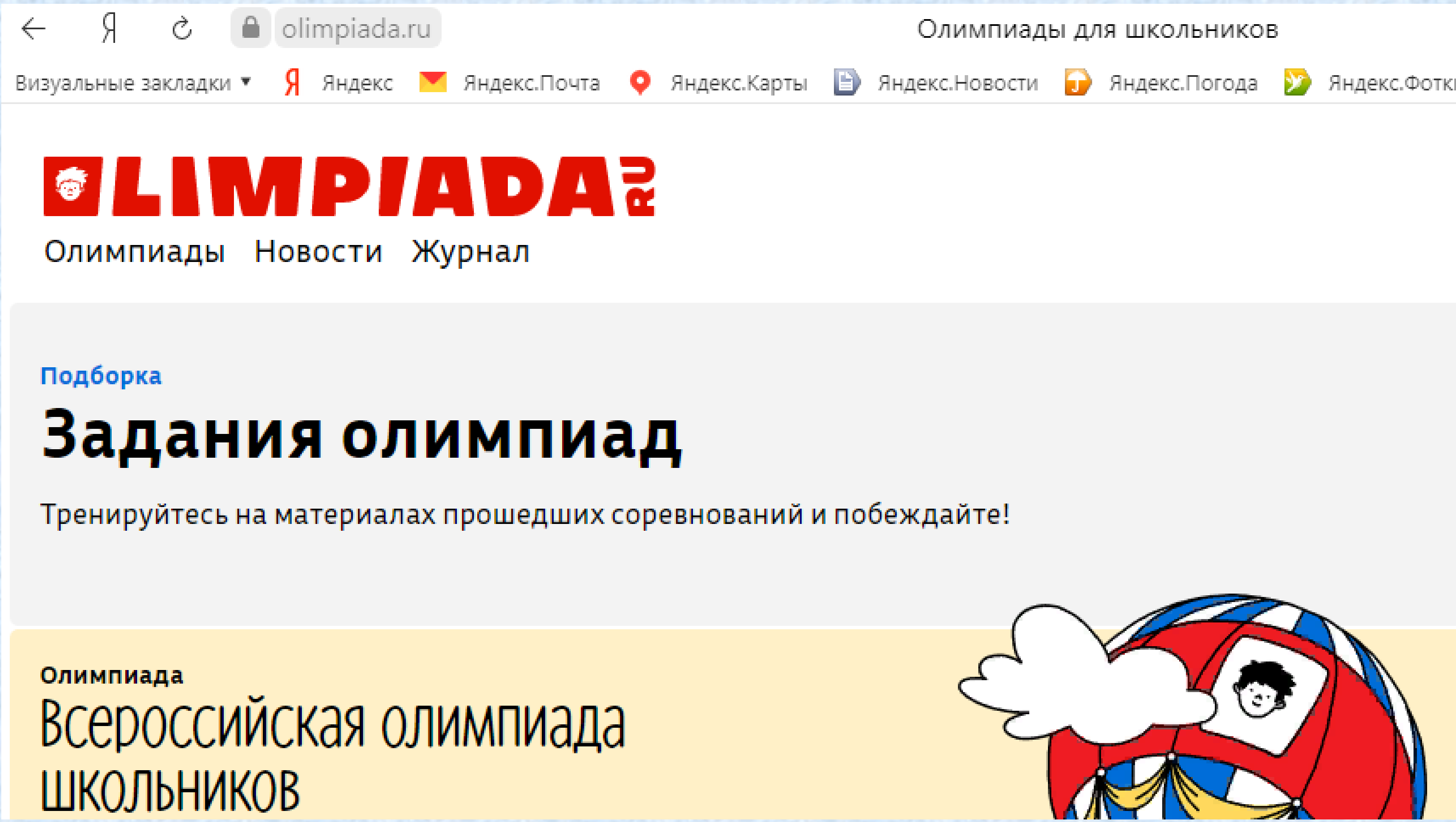
4. На попытку решения олимпиады отводится **не более 24 часов** с момента старта, причем работа должна быть сдана не позднее 23:50 воскресенья (время московское).

5. В следующие выходные можно попробовать еще раз.

Вам будет доступно не более 4 попыток по каждому предмету

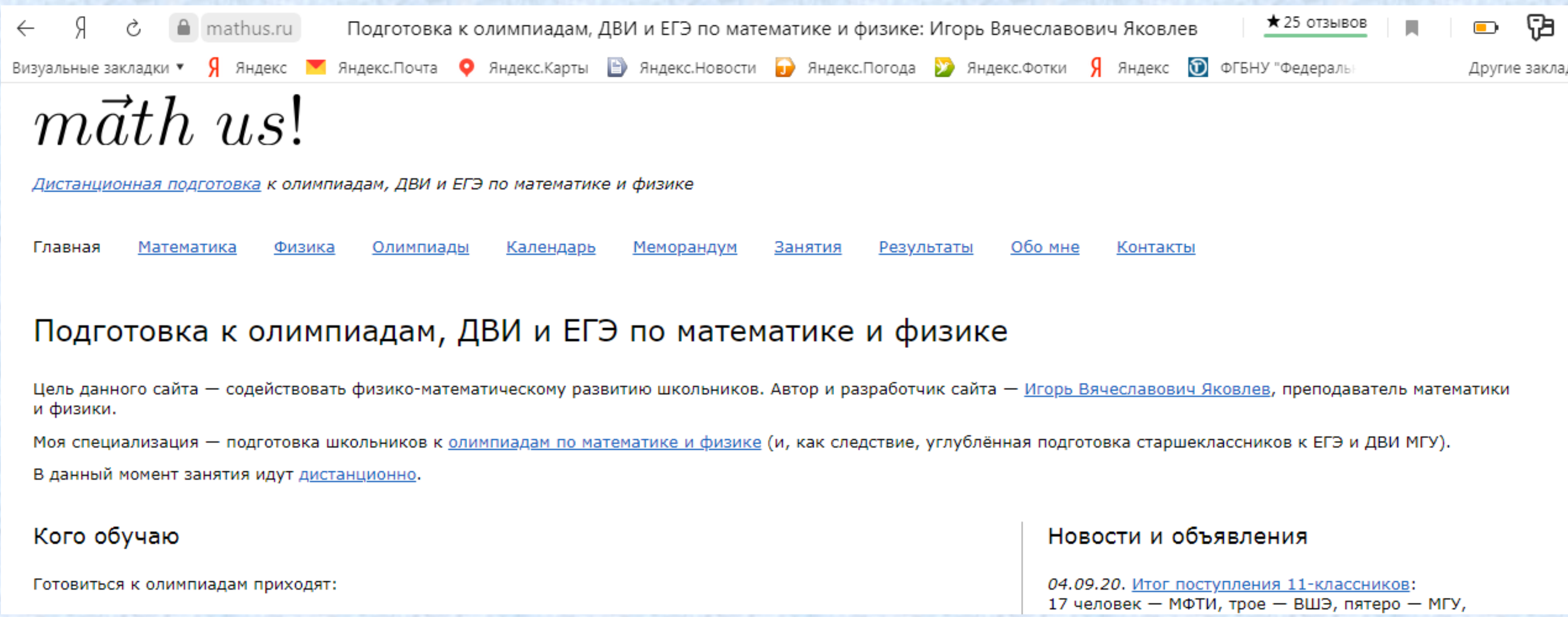
6. По каждой попытке подведение итогов проводится отдельно. В случае успешного прохождения попытки участие в следующих попытках будет недоступно.

www. olimpiada. ru



,

www. mathus. ru



Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2021 год

Задача 1. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1?

Задача 2. Даша написала на доске числа 9, 10, 11, …, 22, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Задача 3. В хирургическом отделении 4 операционных: I, II, III и IV. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной I, через некоторое время — в операционной II, ещё через некоторое время — в III, а потом и в IV.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 32 минуты. За 30 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 52 минуты, а ещё за 10 минут до этого — 30 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Задача 4. В треугольнике ABC длины сторон равны 4, 5 и $\sqrt{17}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек X внутри треугольника ABC, для которых выполняется условие $XA^2 + XB^2 + XC^2 \leqslant 21$.

Задача 5. Решите уравнение: $4\left(x^4 + 3x^2 + 3\right)\left(y^4 - 7y^2 + 14\right) = 21$.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{2019\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}.$$

Задача 7. При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $\left(1 - 2x + ax^2\right)^8$ будет равен -1540?

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) с углом при вершине, равным 114°. Точка O расположена внутри треугольника KLM так, что $\angle OMK = 30^\circ$, а $\angle OKM = 27^\circ$. Найдите величину угла $\angle LOM$.

Задача 9. Функция g определена на целых числах и принимает целые значения, причём $g(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *красивым*, если для любого целого числа x выполнено $g(x) = g(a - x)$. Может ли каждое из чисел 739 и 741 быть красивым?

,

Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2021 год

Задача 1. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1?

Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2021 год, вариант 2

1. Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x))))) = 0.$$

2. Число $x = 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x + 4\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{2x - 4\sqrt{2x - 4}}.$$

3. Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 11$, $P(1) = 21$?

4. Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4022 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4022 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 32 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 55 минут, но чаще, чем каждые 64 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

5. На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с диагональю длины 1, а прокантовали его 7 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

6. В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABD и ACD равна S. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

7. На столе лежат 2021 красных и 2022 зелёных камня. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

,

1. Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение

$$f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = 0.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 10 ШИФР ____________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}}\left(\frac{(x^2-3)(6x-12)}{25}\right)\geq 1.$$

2. Решите уравнение

$$(\cos 2x-2\cos 4x)^2=9+\cos^2 5x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sqrt{y-3x}+3x=12, \\ y^2+y-3x-9x^2=144. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB=BC=DE=2$, $CD=1$, Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-4|+|x+12|-3)(x^2+y^2-12)=0, \\ (x+5)^2+(y-4)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N, при этом $AN<BN$.

а) Найдите отношение $L_1B:AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{1}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β. Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{4; 100\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y-6-x=0$ и $y-6+x=0$. Они делят плоскость

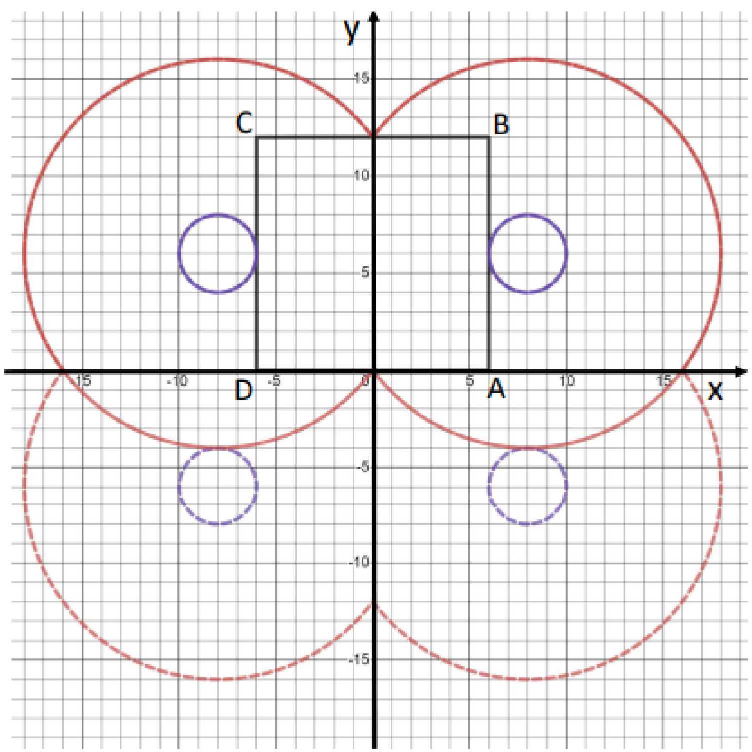


Рис. 2: вариант 3, задача 7

,

на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; -10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y-6-x$ и $y-6+x$ отрицательны. Таким образом, уравнение принимает вид $-(y-6-x)-(y-6+x)=12$, откуда $y=0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(6;0)$ и $D(-6;0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(6;0)$, $B(6;12)$, $C(-6;12)$ и $D(-6;0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y<0$, поэтому можно считать, что $y \geqslant 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x|-8)^2+(y-6)^2=a$ (опустив модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a<0$, у уравнения нет решений. При $a=0$ оно задаёт две точки $(8;6)$ и $(-8;6)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K, система не имеет решений, и значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a>0$.

При $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид $(x-8)^2+(y-6)^2=a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(8;6)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geqslant 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy. Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy.

Если $0<a<4$, график $(|x|-8)^2+(y-6)^2=a$ не пересекает квадрат K, и система уравнений не имеет решений. Если $a=4$, система уравнения имеет два решения – точки $X(8;8)$ и $Y(-8;8)$. Если $a \in (4,40]$, дуга окружности $(x-8)^2+(y-6)^2=a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезок AB дважды –

эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (40, 100)$, дуга окружности $(x-8)^2+(y-6)^2 = a$, $x \geqslant 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy, образуют 4 различных решения системы. Если $a = 100$, система уравнений имеет два решения – точки $(0; 0)$ и $(0; 12)$. Наконец, если $a > 100$, дуга окружности $(x-8)^2+(y-6)^2 = a$, $x \geqslant 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a = 4$ и $a = 100$.

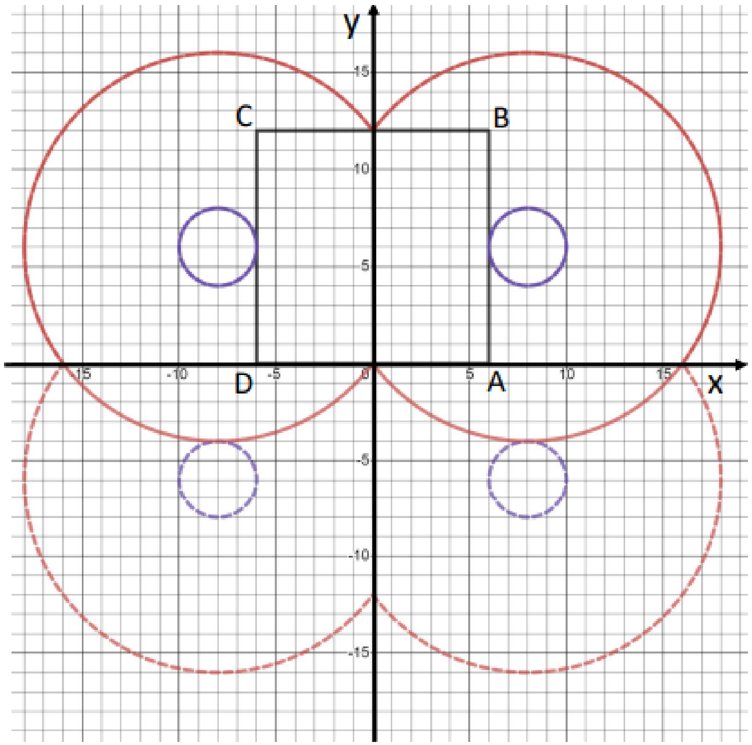


Рис. 2: вариант 3, задача 7

,

На каждой из прямых $y = 0$ и $y = 2$ отмечено по 64 точки с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 64$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 128 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

,

4. На каждой из прямых $y = 0$ и $y = 2$ отмечено по 64 точки с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 64$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 128 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 8420.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 4$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 2$, $AH = 4$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 4$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 4, можно расположить $60 \cdot 2 = 120$ способами (по $64 - 4$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 5, и её можно расположить $2(64-5) = 118$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 118 = 236$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 64 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 126 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $64 \cdot 126 = 8064$ способа.

Итого получаем $120 + 236 + 8064 = 8420$ способов.

,

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^5 y^3 = 18^{50} \cdot 10^{33}$?

,

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^5 y^3 = 18^{50} \cdot 10^{33}$?

Ответ. 126.

Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа x и y можно записать как $x = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 2^{\gamma}$, $y = 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 2^{\nu}$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид $3^{5\alpha+3\lambda} \cdot 5^{5\beta+3\mu} \cdot 2^{5\gamma+3\nu} = 3^{100} \cdot 5^{33} \cdot 2^{83}$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 5\alpha + 3\lambda = 100, \\ 5\beta + 3\mu = 33, \\ 5\gamma + 3\nu = 83. \end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\alpha \in \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20\}$, $\beta \in \{0; 3; 6\}$, $\gamma \in \{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$. Получаем семь вариантов для первого уравнения, три варианта для второго и шесть для третьего. В итоге $7 \cdot 3 \cdot 6 = 126$ решений.