РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 2017 года

I. Решите задачи

№ 1. Решите уравнение: $2^{[sinx]} = 3^{1-cosx}$, где $[a]$– целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

№ 2. В треугольнике ABC AM – медиана и составляет $0{,}25AB$, $\angle BAM$ равен 60°. Найдите $\angle BAC$.

№ 3. Докажите, что число $\sqrt{2011 \cdot 2014 \cdot 2017 \cdot 2020 + 81}$ является целым.

№ 4. Студент СКФУ имеет три источника дохода: стипендия, временная подработка и помощь родителей. Если правительство удвоит стипендию, то его доход возрастёт на 5%. Если время подработки увеличить в два раза, то тогда его доход возрастёт на 15%. На сколько процентов возрастёт доход студента, если его родители будут присылать денег вдвое больше?

№ 5. Найдите наименьшее значение функции $y(x) = \dfrac{81^x + 9^x + 5}{\left(9^x + 1\right)^2}$.

№ 6. Решите уравнение: $(x+2)(x-4) + 4(x-4)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}} = 12.$

№ 7. Шестиклассница Маша изучает признаки делимости. На семи карточках она записала цифры: 0; 1; 2; 2; 3; 4; 5. Сколько различных шестизначных чисел, делящихся на 15, сможет сложить Маша из этих карточек?

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

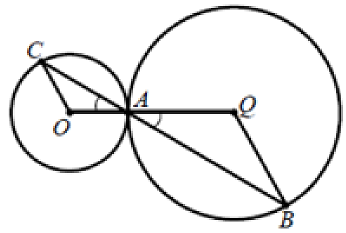
№ 8. Задача. Две окружности касаются в точке A. Через точку A проведена секущая, пересекающая большую окружность в точке B, а меньшую – в точке C. Найдите длину хорды AB, если известно, что $BC = 6\sqrt{2}$, $R = 8$, $r = 4$.

Решение. Обозначим через O и Q центры окружностей. Возможны два случая.

Случай 1. Внешнее касание.

ΔAQB и ΔAOC – равнобедренные,

$\angle BAQ = \angle CAO$, следовательно, ΔAQB и ΔAOC – подобные. Коэффициент подобия этих треугольников равен 2 (отношению радиусов окружностей, описанных около треугольников).

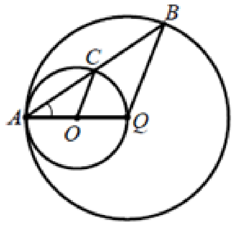


Значит, AB = 2AC= $\frac{2}{3}BC = 4\sqrt{2}$.

Случай 2. Внутреннее касание.

Аналогично случаю 1, имеем:

$$AB = 2AC = 2BC = 12\sqrt{2}.$$



Ответ: $4\sqrt{2}$; $12\sqrt{2}$.

№ 9.Задача. Фокусник из карточной колоды выбрал шесть карт – три чёрной масти и три красной масти. Выбранные карты он перемешал и сложил стопкой. Какова вероятность того, что три нижние карты окажутся одной масти?

Решение. Обозначим карты красной масти через *к*, чёрные – через *ч*. Существуют следующие варианты возможного расположения трёх нижних карт: 1) *ччч*; 2) *кчч*; 3) *чкч*; 4) *ччк*; 5) *чкк*; 6) *кчк*; 7) *ккч*; 8) *ккк*. Из этих 8 случаев условию задачи удовлетворяют два – 1) и 8). Значит, искомая вероятность равна 0,25.

Ответ: 0,25.

№ 10.Задача.При каких значениях параметра*a* система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x^2 = |a|; \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

Решение.Имеем $\begin{cases} x^2 = 1 - y^2, \\ x^2 = y - |a|; \end{cases}$, откуда $1 - y^2 = y - |a|$, следовательно, $y^2 + y - (|a| + 1) = 0$. Так как система имеет единственное решение, то это уравнение должно иметь единственный корень, то есть $D = 1 + 4(|a| + 1) = 0$. Но последнее равенство не выполняется ни для каких значений *a*.

Ответ: таких значений*a* не существует.

Решение задач

№ 1. Решите уравнение: $2^{[sinx]} = 3^{1-cosx}$, где $[a]$– целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее *a*.

Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z$.

Решение. Целое число $[\sin x]$ может принимать только значения $0, \pm 1$.

1) Если $[\sin x] = 0$, то $2^0 = 1$. Следовательно, $3^{1-\cos x} = 1$, откуда $\cos x = 1$. Решением этого уравнения являются $x = 2\pi n$. Заметим, что $\sin x = 0$ при таких x.

2) Если $[\sin x] = -1$, то $3^{1-\cos x} = 2^{-1} = 1/2$. Но $1 - \cos x \geqslant 0$, следовательно, $3^{1-\cos x} \geqslant 1$. Поэтому уравнение $3^{1-\cos x} = 1/2$ не имеет решений.

3) Если $[\sin x] = 1$, то $x = \pi/2 + 2\pi k$. При этих значениях $\cos x = 0$. При подстановке в уравнение это дает $2^1 = 3^1$, чего не может быть.

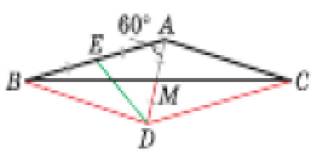
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верный обоснованный ответ в двух случаях	3 балла
верный обоснованный ответ в одном случае	2 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 2. В треугольнике *ABC* *AM* – медиана и составляет 0,25*AB*, $\angle BAM$ равен 60°. Найдите $\angle BAC$.

Ответ: 150^0.

Решение. Продлим медиану *AM* на ее длину: $DM = AM$, тогда *ABDC* — параллелограмм (см. рис.). В треугольнике *ABD* проведем медиану *DE*, тогда $AE = \frac{1}{2}AB = AD$. Таким образом, треугольник *ADE* — равнобедренный с углом 60°, то есть *ADE* — равносторонний.



Следовательно, в треугольнике *ABD* медиана *DE* равна половине стороны *AB*, к которой она проведена, значит, треугольник *ABD* прямоугольный ($\angle ADB = 90°$). Тогда

$$\angle CAD = \angle ADB = 90°,$$

$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 150°$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	3 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2,5 балла
верное, в целом, рассуждение, но допущена вычислительная ошибка	2 балла
наличие прямого угла никак не обосновано, далее проведены верные рассуждения, использующие это равенство, и получен верный ответ	1,5 балла
только верный ответ без обоснования	0,5 балла

№ 3. Докажите, что число $\sqrt{2011\cdot 2014\cdot 2017\cdot 2020+81}$ является целым.

Доказательство. Пусть $n = 2011$, тогда $n + 3 = 2014$, $n + 6 = 2017$, $n + 9 = 2020$. Имеем:

$$\sqrt{n\cdot(n+3)(n+6)(n+9)+81}=\sqrt{\left(n^2+9n\right)\left(n^2+9n+18\right)+9^2}=$$

$$\sqrt{\left(n^2+9n\right)^2+18\cdot\left(n^2+9n\right)+9^2}=\sqrt{\left(n^2+9n+9\right)^2}=n^2+9n+9$$ - целое.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3,5 балла
верное, в целом, рассуждение, доказано, что выражение под корнем является полным квадратом, но корень не вычислен	3 балла
непосредственное извлечение корня с помощью разложения вычисленного числа на множители	2 балла
непосредственное вычисление корня с помощью калькулятора	1 балл

№ 4. Студент СКФУ имеет три источника дохода: стипендия, временная подработка и помощь родителей. Если правительство удвоит стипендию, то его доход возрастёт на 5%. Если время подработки увеличить в два раза, то тогда его доход возрастёт на 15%. На сколько процентов возрастёт доход студента, если его родители будут присылать денег вдвое больше?

Ответ: на 80%

Решение: Пусть S ежемесячный доход студента, a, b и c величины стипендии, подработки и помощи родителей соответственно (выраженные, например, в рублях). Ясно, что $S = a + b + c$. Тогда по условию $2a + b + c = 1{,}05S$ и $a + 2b + c = 1{,}15S$. Из первого уравнения $a = 0{,}05S$, из второго $b = 0{,}15S$, тогда $c = S - a - b = 0{,}8S$, $a + b + 2c = 1{,}8S$, то есть доход студента возрастёт на 80%.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	3 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2,5 балла
верное, в целом, рассуждение, но допущена вычислительная ошибка	2 балла
задача решена в предположении конкретного дохода студента	1 балл
только верный ответ без обоснования	0,5 балла

№ 5. Найдите наименьшее значение функции $y(x) = \dfrac{81^x + 9^x + 5}{\left(9^x + 1\right)^2}$.

Ответ: 0,95.

Решение. Пусть $a = 9^x$. Преобразуем выражение.

$$y = \frac{a^2 + a + 5}{(a+1)^2} = 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{5}{(a+1)^2}$$

Снова заменим $z = \dfrac{1}{a+1}$. Тогда $y = 5z^2 - z + 1$. Минимум этого выражения достигается в точке $z_{\min} = 0.1$ и равен $y_{\min} = 0.95$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3,5 балла
верно и обоснованно найден вид квадратного трехчлена, но наименьшее значение определено неверно из-за вычислительной ошибки	3 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 6. Решите уравнение: $(x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}=12.$

Ответ: $1+\sqrt{13}$; $1-3\sqrt{5}$.

Решение. Найдем область определения уравнения (ОДЗ): $x \le -2;\ x > 4$.

Далее, воспользовавшись свойствами арифметического корня, имеем:

а) $\begin{cases} x > 4, \\ (x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ (x+2)(x-4)+4\sqrt{(x+2)(x-4)}=12. \end{cases}$

Сделав замену $t=\sqrt{(x+2)(x-4)}$, где $t \ge 0$, получаем $\begin{cases} t^2+4t-12=0, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$,

откуда $\begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-4)}=2, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-12=0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\sqrt{13}$;

б) $\begin{cases} x \le -2, \\ (x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2, \\ (x+2)(x-4)-4\sqrt{(x+2)(x-4)}=12. \end{cases}$

Сделав замену $t=\sqrt{(x+2)(x-4)}$, где $t \ge 0$, получаем $\begin{cases} t^2-4t-12=0 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=6$,

откуда $\begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-4)}=6, \\ x \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-44=0, \\ x \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1-3\sqrt{5}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	3 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2,5 балла
верное, в целом, рассуждение, но допущена вычислительная ошибка	2 балла
верно и обоснованно найден один из корней	1,5 балла
только верный ответ без обоснования	0,5 балла

№ 7. Шестиклассница Маша изучает признаки делимости. На семи карточках она записала цифры: 0; 1; 2; 2; 3; 4; 5. Сколько различных шестизначных чисел, делящихся на 15, сможет сложить Маша из этих карточек?

Ответ: 276.

Решение. Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5.

Для делимости на три необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр этого числа делилась на три. Значит, чтобы полученное число делилось на три, из всех данных цифр мы должны отбросить либо двойку, либо пятёрку.

Чтобы число делилось на 5, на последнем месте должны стоять либо 5, либо 0.

Рассмотрим все варианты.

а) Отбрасываем цифру 2, на последнее место ставим цифру 0. Тогда на первые пять мест в произвольном порядке надо расставить цифры 1; 2; 3; 4; 5, что можно сделать $5!=120$ способами.

б) Отбрасываем цифру 2, на последнее место ставим цифру 5. Тогда на первые пять мест надо расставить цифры 0; 1; 2; 3; 4. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на первом месте не должен стоять ноль. Число способов можно посчитать так: из общего количества перестановок пяти цифр вычесть количество перестановок, в которых ноль стоит на первом месте. Если ноль стоит на первом месте, то для подсчёта нужно заметить, что мы имеем дело с перестановками четырёх цифр, находящихся на втором – пятом местах. В итоге получаем $5!-4!=96$ способов.

в) Отбрасываем цифру 5, на последнее место ставим 0. Тогда на оставшиеся 5 мест надо расставить цифры 1; 2; 2; 3; 4. Это можно сделать $\frac{5!}{2}=60$ способами.

В итоге получаем $120+96+60=276$ способов.

Рекомендации по проверке:

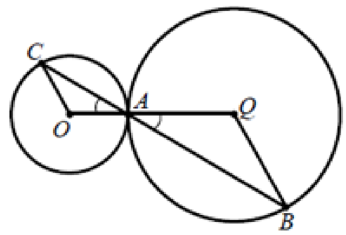
есть в работе	баллы
полное обоснованное решение	4 балла
верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	3,5 балла
верно и обоснованно получен ответ в двух случаях	3 балла
верно и обоснованно получен ответ в одном случае	2 балла
только верный ответ без обоснования	1 балл

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

№ 8.Задача. Две окружности касаются в точке A. Через точку A проведена секущая, пересекающая большую окружность в точке B, а меньшую – в точке C. Найдите длину хорды AB, если известно, что $BC = 6\sqrt{2}$, $R = 8$, $r = 4$.

Решение. Обозначим через O и Q центры окружностей. Возможны два случая.

Случай 1. Внешнее касание.



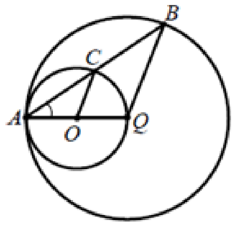
ΔAQB и ΔAOC – равнобедренные,

$\angle BAQ = \angle CAO$, следовательно, ΔAQB и ΔAOC – подобные. Коэффициент подобия этих треугольников равен 2 (отношению радиусов окружностей, описанных около треугольников).

Значит, $AB = 2AC = \frac{2}{3}BC = 4\sqrt{2}$.

Случай 2. Внутреннее касание.
Аналогично случаю 1, имеем:

$$AB = 2AC = 2BC = 12\sqrt{2}.$$



Ответ: $4\sqrt{2}$; $12\sqrt{2}$.

Комментарий. Во втором случае хорда больше диаметра, т.е. внутреннее касание при заданных условиях невозможно.

Верный ответ: $4\sqrt{2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведено любое грамотное объяснение ошибки	5 баллов
только верный ответ без обоснования	1 балл

№ 9.Задача. Фокусник из карточной колоды выбрал шесть карт – три чёрной масти и три красной масти. Выбранные карты он перемешал и сложил стопкой. Какова вероятность того, что три нижние карты окажутся одной масти?

Решение. Обозначим карты красной масти через *к*, чёрные – через *ч*. Существуют следующие варианты возможного расположения трёх нижних карт: 1) *ччч*; 2) *кчч*; 3) *чкч*; 4) *ччк*; 5) *чкк*; 6) *кчк*; 7) *ккч*; 8) *ккк*. Из этих 8 случаев условию задачи удовлетворяют два – 1) и 8). Значит, искомая вероятность равна 0,25.

Ответ: 0,25.

Комментарий. Во всех приведенных выше решениях допущена принципиальная ошибка — рассматриваемые в них события не являются равновероятными.

Пример верного решения: Количество возможных вариантов расположения 6 карт равно $6! = 720$. При этом «красные снизу, черные сверху» — $3!\cdot 3! = 36$ вариантов, «черные снизу, красные сверху» — также $3!\cdot 3! = 36$ вариантов. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{36+36}{720} = \frac{1}{10}$.

Правильный ответ: 0,1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
а) приведено любое грамотное объяснение ошибки	2,5 балла
б) - верно и обоснованно получен ответ в правильном решении - обоснованно получен ответ в	2,5 балла

правильном решении, но неверно из-за вычислительной ошибки	2 балла
Всего:	баллы за а) и б) суммируются

№ 10.Задача.При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-x^2=\lvert a\rvert; \end{cases}$ имеет ровно одно решение?

Решение. Имеем $\begin{cases} x^2=1-y^2, \\ x^2=y-\lvert a\rvert; \end{cases}$, откуда $1-y^2=y-\lvert a\rvert$, следовательно, $y^2+y-(\lvert a\rvert+1)=0$. Так как система имеет единственное решение, то это уравнение должно иметь единственный корень, то есть $D=1+4(\lvert a\rvert+1)=0$. Но последнее равенство не выполняется ни для каких значений a.

Ответ: таких значенийa не существует.

Комментарий. В условии «задачи» ошибок нет. В приведенном «решении» не учтено, что рассматриваемое квадратное уравнение может иметь и два корня y_1 и y_2, но условие «задачи» может выполняться, если одно из двух уравнений $x^2 = y_1 - |a|$ и $x^2 = y_2 - |a|$ не имеет корней, а другое имеет один корень.

Учитывая это, можно довести «решение» до верного. Действительно, пусть $D > 0$, тогда $y_1=\frac{-1-\sqrt{D}}{2}$; $y_2=\frac{-1+\sqrt{D}}{2}$. Заметим, что $y_1 - |a| < 0$, значит, уравнение $x^2 = y_1 - |a|$ корней не имеет. Уравнение $x^2 = y_2 - |a|$ имеет единственный корень, если $x = 0$. В этом случае, $\frac{-1+\sqrt{D}}{2}=\lvert a\rvert \Leftrightarrow \sqrt{4\lvert a\rvert+5}=2\lvert a\rvert+1 \Leftrightarrow |a| = 1$. <u>Ответ</u>: при $a = \pm 1$.

Возможен и другой способ решения. Заметим, что если $(x_0; y_0)$ является решением системы, то решением является и $(-x_0; y_0)$. Значит, необходимым условием единственности решения системы является $x_0 = 0$. Тогда из уравнения $x^2 = 1 - y^2$ следует, что $y = \pm 1$, а из уравнения $1 - y^2 = y - |a|$, что $y = 1$, $|a| = 1$.

Проверим достаточность полученного условия, так как при $|a| = 1$, у системы могут оказаться и другие решения, кроме $(0; 1)$. Подставив $|a| = 1$ в уравнение $1 - y^2 = y - |a|$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни: $y_1 = 1$; $y_2 = -2$. Тогда $x^2 = 0$ или $x^2 = -3$, то есть $x = 0$. Значит, других решений нет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
а) - приведено любое грамотное объяснение ошибки - ошибка указана, но не объяснена	2,5 балла 1,5 балла
б) - верно и обоснованно получен ответ в правильном решении - верное, в целом, рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности	2,5 балла 2 балла

- при решении вторым способом никак не проверена достаточность полученного условия - приведено графическое решение системы, но никак не обосновано отсутствие других решений - только верный ответ без обоснования	1,5 балла 1балл 0,5 балла
Всего:	баллы за а) и б) суммируются