МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ: МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Составитель: Кулишова М.С.,
руководитель профессионального
объединения учителей математики,
преподаватель кафедры
ЕМД и ИТ СКИРО ПК и ПРО

Введение

Существуют два подхода к определению метода замены переменной. Если уравнение $f(x)=0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x))=0$, то нужно ввести новую переменную $u=g(x)$, решить уравнение $p(u)=0$, а затем рассмотреть совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} g(x)=u_1 \\ g(x)=u_2 \\ \ldots \\ g(x)=u_n, \end{array}\right.$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – корни уравнения $p(u)=0$. Чтобы при замене не потерять корней, достаточно убедиться, что каждому значению x из рассматриваемой области соответствует хотя бы одно значение u, удовлетворяющее равенству $u=g(x)$.

В отличие от описанного выше, метод равносильной замены требует нахождения множества значений переменной u. В данном случае накладывается требование: каждому значению x из рассматриваемой области соответствует ровно одно значение переменной u, удовлетворяющее равенству $u=g(x)$. Такой подход ведет к сохранению области определения исходного уравнения и не требует перехода к совокупности.

Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается». В более сложных случаях, для того чтобы найти удачную замену неизвестной, требуется дополнительная творческая работа, которая впоследствии окупается простотой и изящностью решения.

Учить методу замены, выбору удачных новых переменных следует специально еще и потому, что не всегда учащиеся могут додуматься до него самостоятельно. В таких случаях удобную подстановку желательно знать заранее. Особенно трудно учащимся представить себе, что вместо переменной можно подставить тригонометрическую функцию, поскольку при этом, как кажется, алгебраическое выражение усложняется. Однако известные свойства тригонометрических функций упрощают некоторые уравнения, неравенства и их системы, в то время как прямое алгебраическое решение оказывается более сложным технически.

Тригонометрическая подстановка

Тригонометрическая подстановка является одним из способов реализации метода замены переменной и используется в тех случаях, когда область определения исходного уравнения совпадает с областью значения тригонометрической функции или включается в эту область. Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения, неравенства, их систем или алгебраического выражения, которое требуется упростить.

Если из условия задачи следует, что допустимые значения переменной x определяются неравенством $|x| \le 1$, то удобны замены $x = \sin\alpha$ или $x = \cos\alpha$. В первом случае достаточно рассмотреть $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, так как на этом промежутке непрерывная функция $y = \sin x$ возрастает, поэтому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Непрерывная функция $y = cos\ x$ убывает на промежутке $[0; \pi]$, поэтому также каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Вот почему в случае замены $x = \cos\alpha$, достаточно взять $\alpha \in [0; \pi]$. Причем какую из двух подстановок выбрать, зависит от конкретной ситуации.

В случаях, когда переменная может принимать любые действительные значения, используются замены $x = tg\alpha,\ \ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ или $x = ctg\alpha,\ \ \alpha \in (0; \pi)$, так как область значения функции $y = tgx$ и $y = ctgx$ на соответствующих промежутках есть множество всех действительных чисел.

Реже используются замены $x = r\sin\alpha$ или $x = r\cos\alpha$, где $r \in R,\ \ r \ge 0$, а выбор значений α снова зависит от конкретной ситуации.

Когда выражение зависит от двух переменных x и y, целесообразно положить $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, где $r \in R,\ \ r \ge 0,\ \ \alpha \in [0;\ 2\pi)$. Такая замена законна. Действительно, для любых x и y существует такое $r \ge 0$, что $x^2 + y^2 = r^2$. При $r \ne 0$ имеем $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$. А числа, сумма квадратов которых равна единице, по модулю не превосходят единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Геометрический смысл такой замены состоит в следующем: для каждой точки $(x;\ y)$ определяется расстояние r до начала координат и угол α наклона вектора $(x;\ y)$ к положительному направлению оси абсцисс.

1. Решение уравнений

1.1 Иррациональные уравнения

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1 \text{ [12].}$$

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Так как $1 - x^2 \ge 0$, то $|x| \le 1$. Поэтому можно положить $x = \sin\alpha,\ \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{2}} = 1 - 2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \frac{|\sin\alpha + \cos\alpha|}{\sqrt{2}} = \cos 2\alpha \Leftrightarrow \left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \cos 2\alpha.$$

Положим $\alpha + \frac{\pi}{4} = u$, где $u \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$, тогда

$$|\sin u| = \sin 2u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u \rangle 0 \\ \cos u = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \sin u = 0 \\ \begin{cases} \sin u \langle 0 \\ \cos u = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ u_2 = 0 \end{array}\right. .$$

$$x_1 = \sin\left(u_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$x_2 = \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Алгебраическое решение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2} = 1-2x^2 \Leftrightarrow \frac{\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|}{\sqrt{2}} = 1-2x^2.$$

Так как $1-2x^2 \ge 0$, то $1-x^2 \ge x^2$, $\sqrt{1-x^2} \ge |x|$. Значит, $x+\sqrt{1-x^2} \ge 0$, поэтому можно раскрыть модуль

$$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = 1-2x^2 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \left(1-x^2\right) - x^2 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\left(\sqrt{1-x^2}-x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x^2}+x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1-x^2} - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0 \\ x \ge -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Решение уравнения алгебраическим способом требует хорошего навыка проведения тождественных преобразований и грамотного обращения с равносильными переходами. Но в общем оба приема решения равноценны.

Пример 2. Решите уравнение

$$\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}\left(8x^2-1\right) \text{ [14].}$$

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Область определения уравнения задается неравенством $1-4x^2\geq 0$, что равносильно условию $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, тогда $2x\in[-1;1]$. Поэтому можно положить $2x=\cos\alpha,\quad \alpha\in[0;2\pi]$. Уравнение примет вид

$$\left|2\frac{\cos\alpha}{2}-\sqrt{1-4\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2}\right|=\sqrt{2}\left(8\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2-1\right)\Leftrightarrow\left|\cos\alpha-\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right|=\sqrt{2}\left(2\cos^2\alpha-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\cos\alpha-\left|\sin\alpha\right|\right|=\sqrt{2}\cos 2\alpha .$$

Так как $\alpha\in[0;2\pi]$, то $\sin\alpha\geq 0$. Раскроем внутренний модуль

$$\left|\cos\alpha-\sin\alpha\right|=\sqrt{2}\cos 2\alpha\Leftrightarrow\left|\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right|=\cos 2\alpha\Leftrightarrow\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|=\cos 2\alpha .$$

Положим $\frac{\pi}{4}-\alpha=u, u\in\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, тогда

$$\left|\sin u\right|=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)\Leftrightarrow\left|\sin u\right|=\sin 2u\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin u>0\\ \sin u-2\sin u\cos u=0\end{cases}\\ \sin u=0\\ \begin{cases}\sin u<0\\ \sin u+2\sin u\cos u=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin u>0\\ \cos u=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \sin u=0\\ \begin{cases}\sin u<0\\ \cos u=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z\\ u=\pi k,\quad k\in Z\\ u=\frac{4\pi}{3}+2\pi l,\quad l\in Z\end{array}\right. .$$

Условию $u\in\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ удовлетворяют два значения $u_1=0$ и $u_2=\frac{4\pi}{3}$.

$$x_1=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-u_1\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$x_2=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-u_2\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}=$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}\right\}$.

Алгебраическое решение

$$\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-\sqrt{1-4x^2}\geq 0\\ 2x-\sqrt{1-4x^2}=\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)\end{cases}\\ \begin{cases}2x-\sqrt{1-4x^2}<0\\ 2x-\sqrt{1-4x^2}=-\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-\sqrt{1-4x^2}\geq 0\\ \sqrt{1-4x^2}=2x-\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)\end{cases}\\ \begin{cases}2x-\sqrt{1-4x^2}<0\\ \sqrt{1-4x^2}=2x+\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-\sqrt{1-4x^2}\geq 0\\ \sqrt{1-4x^2}=-8\sqrt{2}x^2+2x+\sqrt{2}\end{cases}\\ \begin{cases}2x-\sqrt{1-4x^2}<0\\ \sqrt{1-4x^2}=8\sqrt{2}x^2+2x-\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Возведем в квадрат уравнение первой системы совокупности, получим

$$\sqrt{1-4x^2}=-8\sqrt{2}x^2+2x+\sqrt{2}\Rightarrow 128x^4-32\sqrt{2}x^3-24x^2+4\sqrt{2}+1=0.$$

Пусть $2\sqrt{2}x=t$, тогда $8x^2=t^2$, $16\sqrt{2}x^3=t^3$, $64x^4=t^4$. Уравнение перепишется в виде

$$2t^4-2t^3-3t^2+2t+1=0.$$

Проверкой устанавливаем, что $t=\pm 1$ – корень, тогда делением многочлена $2t^4-2t^3-3t^2+2t+1$ на двучлен t^2-1получаем разложение правой части уравнения на множители

$$2t^4-2t^3-3t^2+2t+1=\left(t^2-1\right)\left(2t^2-2t-1\right)=0\Leftrightarrow\left(t^2-1\right)\left(t-\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

От переменной t перейдем к переменной x, получим

$$\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\\ x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{8}\end{array}\right..$$

Условию $2x-\sqrt{1-4x^2}\geq 0$ удовлетворяют два значения

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ x_2=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8} \end{array}\right..$$

Подставив эти значения в исходное уравнение, получаем, что $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ – корень.

Решая аналогично уравнение второй системы исходной совокупности, находим, что $x=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$ тоже корень.

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}\right\}$.

Если в предыдущем примере алгебраическое решение и решение с помощью тригонометрической подстановки были равноценны, то в данном случае решение подстановкой выгоднее. При решении уравнения средствами алгебры приходится решать совокупность из двух уравнений, то есть дважды возводить в квадрат. После этого неравносильного преобразования получаются два уравнения четвертой степени с иррациональными коэффициентами, избавиться от которых помогает замена. Еще одна трудность – проверка найденных решений подстановкой в исходное уравнение.

Пример 3. Решите уравнение

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12} \text{ [31].}$$

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Так как $x^2-1>0$, то $|x|>1$. Заметим, что отрицательное значение неизвестного не может быть решением задачи. Действительно, преобразуем исходное уравнение к виду

$$x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{35}{12}.$$

Множитель в скобках в левой части уравнения положительный, правая часть уравнения тоже положительная, поэтому множитель x в левой части уравнения не может быть отрицательным. Вот почему $x>1$, тогда $\frac{1}{x}\in(0;1)$, поэтому можно положить $x=\frac{1}{\sin\alpha},\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ Исходное уравнение перепишется в виде

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{35}{12}\Leftrightarrow\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha|\cos\alpha|}=\frac{35}{12}.$$

Так как $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$. Уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{35}{12}\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{35}{12}.$$

Пусть $\sin\alpha+\cos\alpha=a,\quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha=b$. Перейдем от уравнения к равносильной системе

$$\begin{cases}12a=35b\\ a^2-1=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{7}{5}\\ b=\frac{12}{25}\end{cases}.$$

Числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\alpha=\frac{3}{5}\\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{5}{3};\frac{5}{4}\right\}$.

Алгебраическое решение

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}\Leftrightarrow\frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}.$$

Введем замену $\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} = y, \quad y > 0$, тогда уравнение запишется в виде

$$y^2 + 2y - \frac{1225}{144} = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + \frac{1225}{144} = \frac{1369}{144} = \left(\frac{37}{12}\right)^2$$

$$\left[\begin{aligned} y_1 &= \frac{25}{12} \\ y_2 &= -\frac{49}{12} \end{aligned}\right.$$

Второй корень является лишним, поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{25}{12} \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1} = \frac{625}{144} \Rightarrow 144x^2 - 625x^2 + 625 = 0$$

$$D = 625^2 - 4 \cdot 625 \cdot 144 = 625(625 - 576) = 25^2 \cdot 7^2 = 175^2$$

$$\left[\begin{aligned} x^2 &= \frac{800}{288} = \frac{25}{9} \\ x^2 &= \frac{450}{288} = \frac{25}{16} \end{aligned}\right.$$

Так как $x > 0$, то $\left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{3} \\ x_2 &= \frac{5}{4} \end{aligned}\right.$.

Ответ: $\left\{\frac{5}{3}; \frac{5}{4}\right\}$.

В данном случае алгебраическое решение в техническом плане проще, но рассмотреть приведенное решение с помощью тригонометрической подстановки следует обязательно. Это связано, во-первых, с нестандартностью самой подстановки, которая разрушает стереотип, что применение тригонометрической подстановки возможно лишь, когда $|x| \le 1$. Оказывается, если $|x| > 1$ тригонометрическая подстановка тоже находит применение. Во-вторых, представляет определенную трудность решение тригонометрического уравнения $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{35}{12}$, которое сводится введением замены к системе уравнений. В определенном смысле эту замену тоже можно считать нестандартной, а знакомство с ней позволяет обогатить арсенал приемов и методов решения тригонометрических уравнений.

Пример 4. Решить уравнение

$$16x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}=3 \text{ [4].}$$

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Так как переменная x может принимать любые действительные значения, положим $x=tg\alpha, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$2x^2+1=2tg^2\alpha+1,$$

$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{tg^2\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{|\cos\alpha|}=\frac{1}{\cos\alpha}, \text{так как } \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Исходное уравнение с учетом проведенных преобразований примет вид

$$16tg\alpha\left(2tg^2\alpha+1\right)\frac{1}{\cos\alpha}=3\Leftrightarrow 16\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{16\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{2\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=3\Leftrightarrow 16\sin\alpha\left(\sin\alpha+1\right)=3\left(1-\sin^2\alpha\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4\alpha-16\sin^3\alpha-6\sin^2\alpha-16\sin\alpha+3=0.$$

Так как $\sin\alpha\neq 0$, поделим обе части уравнения на $\sin^2\alpha$, получим

$$3\sin^2\alpha-16\sin\alpha-6-\frac{16}{\sin\alpha}+\frac{3}{\sin^2\alpha}=0\Leftrightarrow 3\left(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)-16\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)-6=0.$$

Пусть $\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}=t$, тогда $\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}=t^2-2$. Уравнение примет вид

$$3\left(t^2-1\right)-16t-6=0\Leftrightarrow 3t^2-16t-12=0.$$

$$\frac{D}{4}=100,\quad t_1=6,\quad t_2=-\frac{2}{3}.$$

Учитывая подстановку $\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}=t$, получим совокупность из двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}=6\\ \sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}=-\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin^2\alpha-6\sin\alpha+1=0\\ 3\sin^2\alpha+2\sin\alpha+3=0\end{array}\right..$$

Решим каждое уравнение совокупности по отдельности.

1) $$\sin^2\alpha - 6\sin\alpha + 1 = 0\,.$$

$$\frac{D}{4} = 8,\quad (\sin\alpha)_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}\,.$$

$3+2\sqrt{2}$ не может быть значением синуса, так как $|\sin\alpha| \le 1$ для любых значений аргумента.

$$x^2 = tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}{1-\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{17-2\sqrt{2}}{12\sqrt{2}-16} = \frac{\left(17-2\sqrt{2}\right)\left(12\sqrt{2}+16\right)}{144\cdot 2-256} =$$

$$= \frac{204\sqrt{2}-288+272-192\sqrt{2}}{32} = \frac{12\sqrt{2}-16}{32} = \frac{2\left(3\sqrt{2}-4\right)}{16}\,.$$

Откуда

$$x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2\left(3\sqrt{2}-4\right)}.$$

Так как $\sqrt{x^2+1} > 0,\ 2x^2+1 > 0$ и правая часть исходного уравнения положительна, то $x > 0$. Из чего следует, что $x = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(3\sqrt{2}-4\right)}$.

2) $$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 3 = 0\,.$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9 = -8\,.$$

Это уравнение корней не имеет, так как $\frac{D}{4} < 0$.

Итак, исходное уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(3\sqrt{2}-4\right)}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\sqrt{2\left(3\sqrt{2}-4\right)}$.

Алгебраическое решение

Данное уравнение легко «превратить» в рациональное уравнение восьмой степени возведением обеих частей исходного уравнения в квадрат. Поиск корней получившегося рационального уравнения затруднен, и необходимо обладать высокой степенью изобретательности, чтобы справиться с задачей. Поэтому целесообразно знать иной способ решения, менее традиционный. Например, подстановку $x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$, предложенную И. Ф. Шарыгиным [57].

Положим $x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right),\quad y>0$, тогда

$$2x^2+1=2\cdot\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+1=\frac{1}{2}\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)+1=\frac{1}{2}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)+1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2+2+\frac{1}{y^2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

Преобразуем правую часть уравнения $16x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}=3$:

$$16\cdot\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)=2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2-\frac{1}{y^2}\right)=2\left(y^4-\frac{1}{y^4}\right).$$

С учетом преобразований уравнение $16x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}=3$ примет вид

$$2\left(y^4-\frac{1}{y^4}\right)=3\Leftrightarrow\frac{2y^8-3y^4-2}{y^4}=0.$$

Введем замену $y^4=t,\quad t>0$, тогда

$$\frac{2t^2-3t-2}{t^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=2\\ t_2=-\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Второй корень является лишним, поэтому $y=\sqrt[4]{2}$, а $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

Если заранее не известна идея решения уравнения $16x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}=3$***, то решать стандартно возведением обеих частей уравнения в квадрат проблематично, так как в результате получается уравнение восьмой степени*** $1024x^8+2048x^6+1280x^4+256x^2-9=0$***, найти корни которого чрезвычайно сложно. Решение с помощью тригонометрической подстановки выглядит громоздким. Могут возникнуть трудности с поиском корней уравнения*** $3\sin^4\alpha-16\sin^3\alpha-6\sin^2\alpha-16\sin\alpha+3=0$***, если не заметить, что оно является возвратным. Решение указанного уравнения происходит с применением аппарата алгебры, поэтому можно сказать,***

что предложенное решение является комбинированным. В нем сведения из алгебры и тригонометрии работают совместно на одну цель – получить решение. Также решение указанного уравнения требует аккуратного рассмотрения двух случаев. Решение заменой $x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$ ***технически проще и красивее, чем с помощью тригонометрической подстановки. Желательно, чтобы учащиеся знали такой способ замены и применяли его для решения задач.***

1.2 Рациональные уравнения

Тригонометрическая подстановка применяется при решении рациональных уравнений, когда уравнение не имеет рациональных корней или найденные рациональные решения не исчерпывают всего множества решений уравнения.

При решении иррациональных уравнений возможность введения тригонометрической подстановки была видна по структуре уравнения. В нескольких следующих задачах применение метода тригонометрической подстановки не так очевидно. Вот почему прежде чем ввести подстановку, нужно доказать законность такого введения.

Пример 1. Сколько корней имеет уравнение

$$4\sqrt{2}|x|\left(x^2-1\right)\left(2x^4-4x^2+1\right)=1 \text{ [37].}$$

Решение этой задачи любым методом начинается одинаково. Докажем, что все корни данного уравнения принадлежат промежутку $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Действительно, если

$$|x|>\sqrt{2} \quad \left|x^2-1\right|>1, \quad \left|2x^4-4x^2+1\right|>1, \quad \left|4\sqrt{2}|x|\left(x^2-1\right)\left(2x^4-4x^2+1\right)\right|>8.$$

Но тогда в исходном уравнении слева стоит произведение больше восьми, а справа единица, что невозможно.

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Положим $x=\sqrt{2}\cos\alpha,\ \ \alpha\in[0;\pi]$. Тогда каждому корню $x_0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ исходного уравнения будет соответствовать ровно один корень $t_0\in[0;\pi]$, где

$x_0=\sqrt{2}\cos t_0$. Наоборот, каждому корню $t_1\in[0;\pi]$ уравнения соответствует ровно один корень исходного уравнения. Таким образом, задача может быть переформулирована так: сколько корней на промежутке $0\le t\le\pi$ имеет уравнение

$$4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot|\cos\alpha|\left(2\cos^2\alpha-1\right)\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\right)=1.$$

Так как $x\ne0$ и $x\ne\pm\sqrt{2}$, то можно взять $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cap\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Заметим, что если x_0 - корень данного уравнения, то и $-x_0$ тоже корень. Вот почему достаточно рассмотреть $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то есть отыскать только положительные решения. С учетом выше изложенного исходное уравнение перепишется в виде

$$4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha-1\right)\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\right)=1\Leftrightarrow 8\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\right)=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\left(8\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha-1\right)+1\right)=1\Leftrightarrow 8\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\left(8\cos^2\alpha\left(-\sin^2\alpha\right)+1\right)=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\left(-8\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+1\right)=1\Leftrightarrow 8\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cos4\alpha=1.$$

Так как $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то можно обе части равенства умножить на $\sin\alpha\ne0$, получим

$$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cdot\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha=\sin\alpha\Leftrightarrow\sin8\alpha=\sin\alpha\Leftrightarrow\sin8\alpha-\sin\alpha=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{9\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{7\alpha}{2}=\pi n,\quad n\in Z\\ \frac{9\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{2\pi n}{7},\quad n\in Z\\ \alpha=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9},\quad k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{2\pi}{7}\\ \alpha=\frac{\pi}{9}\\ \alpha=\frac{\pi}{3}\end{array}\right..$$

Ответ: шесть корней.

Алгебраическое решение

Так как выражение от правой части равенства четное и $x \neq 0$ и $x \neq \pm\sqrt{2}$, выясним вопрос о наличии корней на промежутке $\left(0;\, \sqrt{2}\right)$.

Проверкой устанавливаем, что $x_1 = \frac{1}{2}$ – корень. Рассмотрим функции от правой и левой частей уравнения, то есть функции $y_1 = 4\sqrt{2}x\left(x^2 - 1\right)\left(2x^4 - 4x^2 + 1\right)$ и $y_2 = 1$. Так как

$$y_1(0{,}6) = \frac{21696\sqrt{2}}{78125} < 1 \quad y_1(0{,}8) = \frac{66672\sqrt{2}}{78125} > 1 \quad y_1(0{,}95) = \frac{58152939\sqrt{2}}{160000000} < 1$$

и функция $y_1 = 4\sqrt{2}x\left(x^2 - 1\right)\left(2x^4 - 4x^2 + 1\right)$ непрерывна на числовой прямой, то найдутся такие значения x_2 и x_3, что $y(x_2) = y(x_3) = 1$. Поэтому на промежутке $(0;\, 1)$ уравнение имеет три корня, а на всей числовой прямой – шесть корней.

Ответ: 6 корней.

В данном случае можно решать любым способом, но если количество корней на небольшом промежутке достаточно велико, вычисления могут оказаться громоздкими, и сам метод неэффективным. В этом случае на помощь приходит метод тригонометрической подстановки. Надо заметить, что решить вопрос о количестве корней можно с помощью производной, но в данном случае такое решение мало эффективно, так как затруднительно найти нули производной.

Пример 2. Решить уравнение

$$8x^3 - 6x - \sqrt{3} = 0\,.$$

Если для выше приведенных задач не удается найти нетрадиционный путь решения, то все равно остается вероятность справиться с задачей с помощью стандартных школьных рассуждений, правда, затратив при этом гораздо больше времени. Эта задача лишает такого выбора, так как ее решение другим способом не представляется возможным.

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Поделим все члены уравнения на 2. Уравнение примет вид

$$4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Докажем, что все корни данного уравнения по модулю не превосходят единицы. Пусть $|x|>1$, тогда $|4x^2-3|>1,\quad |x(4x^2-3)|>1$. Получили, что при $|x|>1$ левая часть уравнения по модулю больше единицы, а правая – меньше единицы, что невозможно.

Положим $x=\cos\alpha,\quad \alpha\in[0;\pi]$. Уравнение примет вид

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos 3\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},n\in Z.$$

Условию $\alpha\in[0;\pi]$ удовлетворяют три значения

$$\left[\begin{array}{l}\alpha_1=\dfrac{\pi}{18}\\ \alpha_2=\dfrac{13\pi}{18}\\ \alpha_3=\dfrac{11\pi}{18}\end{array}\right..$$

Поскольку кубическое уравнение не может иметь больше трех различных корней, то мы нашли все решения.

Ответ: $\left\{cos\frac{\pi}{18};\cos\frac{13\pi}{18};\cos\frac{11\pi}{18}\right\}$.

1.3 Показательные уравнения

Приведем пример задания, решить которое без введения тригонометрической подстановки не представляется возможным.

Пример 1. Решить уравнение $2^{3x}-3\cdot2^x-\sqrt{3}=0$.

Пусть $x=t+1$, тогда уравнение перепишется в виде

$$2^{3(t+1)}-3\cdot2^{t+1}-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 8\cdot2^{3t}-6\cdot2^t-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 4\cdot2^{3t}-3\cdot2^t=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Введем замену $2^t=q,\quad q>0$, получим

$$4q^3-3q=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это уравнение мы уже решали[1]. Его корни

---

[1] Пример 2 пункта 1.2 Рациональные уравнения

$$\left[\begin{array}{l} q_1 = \cos\frac{\pi}{18} \\ q_2 = \cos\frac{11\pi}{18} \\ q_3 = \cos\frac{13\pi}{18} \end{array}\right. .$$

Два последних значения меньше нуля, поэтому нам подходит только $q = \cos\frac{\pi}{18}$. Перейдем к переменной t, а затем к переменной x

$$2^t = \cos\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow t = \log_2 \cos\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow x = \log_2 \cos\frac{\pi}{18} + 1 \Leftrightarrow x = \log_2 2\cos\frac{\pi}{18}.$$

Ответ: $\log_2 2\cos\frac{\pi}{18}$.

2. Решение систем

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 4xy\left(2y^2-1\right)=1 \end{cases} \text{[3].}$$

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Так как квадрат суммы чисел x и y равен единице, то каждое из этих чисел по модулю не превосходит единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Поэтому можно положить $x=\sin\alpha,\quad y=\cos\alpha,\quad \alpha\in[0;2\pi)$. Второе уравнение системы примет вид

$$4\sin\alpha\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha-1\right)=1 \Leftrightarrow 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin 4\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z.$$

Условию $\alpha\in[0;2\pi)$ удовлетворяют четыре значения

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_1=\frac{\pi}{8} \\ \alpha_2=\frac{5\pi}{8} \\ \alpha_3=\frac{9\pi}{8} \\ \alpha_4=\frac{13\pi}{8} \end{array}\right..$$

$$x_1=\sin\alpha_1=\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad y_1=\cos\alpha_1=\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$x_2=\sin\alpha_2=\sin\frac{5\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad y_2=\cos\alpha_2=\cos\frac{5\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$x_3=\sin\alpha_3=\sin\frac{9\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad y_3=\cos\alpha_3=\cos\frac{9\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$x_4=\sin\alpha_4=\sin\frac{13\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad y_4=\cos\alpha_4=\cos\frac{13\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Алгебраическое решение

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 4xy\left(2y^2-1\right)=1 \end{cases} \Rightarrow 4y\sqrt{1-y^2}\left(2y^2-1\right)=1 \Rightarrow 16y^2\left(1-y^2\right)\left(4y^4-4y^2+1\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(16y^2-16y^4\right)\left(4y^4-4y^2+1\right)=1.$$

Пусть $2y^2=t, t\ge 0$, тогда $t^2=4y^2$. Имеем

$$\left(8t-4t^2\right)\left(t^2-2t+1\right)=1 \Leftrightarrow -4t^4+16t^3-20t^2+8t-1=0 \Leftrightarrow 4t^4-16t^3=-20t^2+8t-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2\right)^2-2\cdot 2t^2\cdot 4t+16t^2=16t^2-20t^2+8t-1 \Leftrightarrow \left(2t^2-4t\right)^2=-4t^2+8t-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2-4t\right)^2+\left(2t^2-4t\right)z+\frac{z^2}{4}=\frac{z^2}{4}+\left(2t^2-4t\right)z-4t^2+8t-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2-4t+\frac{z}{2}\right)^2=t^2\left(-4+2z\right)+t\left(8-4z\right)+\left(\frac{z^2}{4}-1\right).$$

Подберем z так, чтобы многочлен, стоящий в правой части равенства, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двукратный корень, то есть

$$\frac{D}{4}=\left(4-2z\right)^2+\left(4-2z\right)\left(\frac{z^2}{4}-1\right)=-\frac{z^3}{2}+5z^2-14z+12=0.$$

Подбором находим, что $z_0=2$ является корнем уравнения

$$-\frac{z^3}{2}+5z^2-14z+12=0.$$

Подставим $z_0=2$ в уравнение $\left(2t^2-4t+\frac{z}{2}\right)^2=t^2\left(-4+2z\right)+t\left(8-4z\right)+\left(\frac{z^2}{4}-1\right)$,

после чего оно примет вид

$$\left(2t^2-4t+1\right)^2=0 \Leftrightarrow 2t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$$

Перейдем к переменной y

$y_1 = \sqrt{\frac{t_1}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$y_2 = -\sqrt{\frac{t_1}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$y_3 = \sqrt{\frac{t_2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$y_4 = -\sqrt{\frac{t_2}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Подставив получившиеся значения переменной y во второе уравнение системы, найдем соответствующие значения переменной x

$x_1 = \frac{1}{4y_1\left(2y_1^{\ 2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$x_2 = \frac{1}{4y_2\left(2y_2^{\ 2}-1\right)} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$x_3 = \frac{1}{4y_3\left(2y_3^{\ 2}-1\right)} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$x_4 = \frac{1}{4y_4\left(2y_4^{\ 2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Пример 2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x+3y=4y^3 \\ y+3z=4z^3 \\ z+3x=4x^3 \end{cases} \text{ [18].}$$

Здесь представлена так называемая циклическая система уравнений. Подобные системы часто предлагаются на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по математике [30]. Решить эти системы, не зная специальных методов решения, очень сложно. В данном случае подбором устанавливается решение $(0; 0; 0)$. Попытки доказать, что система не имеет других решений, положительных результатов не дают. Неоценимую помощь в решении такого класса задач оказывает метод тригонометрической подстановки.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x = 4y^3 - 3y \\ y = 4z^3 - 3z \\ z = 4x^3 - 3x \end{cases}.$$

Докажем, что все числа x, y, z по абсолютной величине не превосходят единицы. Пусть x – максимальное из чисел x, y, z и $x > 1$, то $z = 4x^3 - 3x > x$. Пришли к противоречию. Если число x – минимальное и $x < -1$, то $z = 4x^3 - 3x < x$. Опять пришли к противоречию. Итак $-1 \le x, y, z \le 1$.

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Положим $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. Тогда $z = \cos 3\alpha$, $y = \cos 9\alpha$, $x = \cos 27\alpha$. Число решений исходной системы равно числу решений уравнения

$$\cos\alpha = \cos 27\alpha \Leftrightarrow \cos 27\alpha - \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin 14\alpha \sin 13\alpha = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{k\pi}{13}, k \in Z \\ \alpha = \dfrac{n\pi}{14}, n \in Z \end{array}\right..$$

Условию $\alpha \in [0; \pi]$ удовлетворяет 27 решений

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{k\pi}{13}, & k = 0,1,2,...,13 \\ \alpha = \dfrac{n\pi}{14}, & n = 1,2,...,13 \end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{k\pi}{13}, & k = 0,1,2,...,13 \\ \alpha = \dfrac{n\pi}{14}, & n = 1,2,...,13 \end{array}\right..$

Алгебраическое решение

Выразим переменную x

$$x = 4y^3 - 3y = 4\left(4z^3 - 3z\right)^2 - 3\left(4z^3 - 3z\right) =$$

$$= 4\left(4\left(4x^3 - 3x\right)^3 - 3\left(4x^3 - 3x\right)\right)^2 - 3\left(4\left(4x^3 - 3x\right)^3 - 3\left(4x^3 - 3x\right)\right).$$

Выяснить количество корней полученного уравнения с помощью производной или другим способом чрезвычайно трудно, поэтому в данном

случае самый эффективный способ решение – решение с помощью тригонометрической подстановки.

Примеры для самостоятельной работы:

1. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.
2. Решите уравнение $4(x-1)(2x^2-4x+1)\sqrt{x(2-x)}=1$.
3. Решить уравнение $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.
4. Решить уравнение $\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}(8x^2-1)$.
5. Решить уравнение $x^2\sqrt{1-x^2}=\left|x^3\right|-|x|+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
6. Решить уравнение $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.
7. Решить уравнение $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=\sqrt{2}(2x^2-1)$.
8. Решить систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=1\\4xy(2y^2-1)=1\end{cases}$.
9. Решить систему $\begin{cases}(4x^3-3x)^6+(4y^3-3y)^6=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$.
10. Выяснить, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}x+3y=4y^3\\y+3z=4z^3\\z+3x=4x^3\end{cases}$.
11. При каких значениях параметра система имеет решение $\begin{cases}x^2+y^2=a\\xy(2y^2-a^2)=1\end{cases}$.