I. Решите предложенные задания.

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{8}{3}, \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{12}{5}, \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{24}{7}. \end{cases}$$

2. Две группы учащихся 7 и 8 человек принимали участие в парном соревновании по разгадыванию математических головоломок (по одному участнику от каждой команды на одну головоломку). В конце игры каждый назвал количество своих партнеров: 3,3,3,3,3,5,6,6,6,6,6,6,6,6,6. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

3. Может ли вершина параболы $y = 4x^2 - 4(a+1)x + a$ при каком-нибудь значении a находиться во второй четверти?

4. Все вершины правильного пятиугольника $ABCDE$ расположены внутри окружности. Продолжения сторон AB, BC, CD, DE, EA за вершины B, C, D, E, A соответственно, до пересечения с окружностью окрашены в зеленый цвет. Продолжения этих же сторон за вершины A, B, C, D, E соответственно, до пересечения с окружностью окрашены в желтый цвет. Докажите, что сумма длин зеленых отрезков равна сумме длин желтых отрезков.

5. Укажите две последние цифры в записи числа $11^{10} - 1$.

6. Существует ли натуральное число n, при котором справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} > 2021\,?$$

7. Алладин нашёл в Волшебной пещере 10 кг драгоценностей (различные изделия, камни и слитки). Каждая драгоценная единица не превышала по весу 1 кг. Чтобы незаметно вынести из пещеры найденный клад, Алладин должен брать с собой не более 3 кг за один заход. Какое наименьшее количество раз он должен сходить в Волшебную пещеру, чтобы незаметно вынести все найденные драгоценности?

   Драгоценности должны быть вынесены из пещеры в неизменном виде.

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

8. Найдите сумму квадратов действительных корней уравнения

$$x^5-4x+2=x^4+x^2.$$

Решение. $x^5-x^4-x^2-4x+2=0$. Применим теорему Виета для уравнения пятой степени

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5=0, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+x_2x_4x_5+x_3x_4x_5+x_1x_4x_5=1, \\ x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5=-4, \\ x_1x_2x_3x_4x_5=-2. \end{cases}$$

Найдем сумму квадратов пяти слагаемых:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-$$
$$-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5),$$

Подставив соответствующие значения из системы уравнений, получим требуемое значение:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=1.$$

Ответ: 1.

9. Положительные числа *x*, *y*, *z* таковы, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$?

Ответ: 0

Решение. Заметим, что $\frac{x^2}{y+z}+x=\frac{x^2+xy+xz}{y+z}=\frac{x}{y+z}\cdot(x+y+z)$. Аналогично $\frac{y^2}{x+z}+y=\frac{y}{x+z}\cdot(x+y+z)$ и $\frac{z^2}{x+y}+z=\frac{z}{x+y}\cdot(x+y+z)$. Суммируя почленно три равенства, получим $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+(x+y+z)=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\cdot(x+y+z)$. Далее, $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-1\right)\cdot(x+y+z)$. Учитывая, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$, получаем ответ.

10.Решите уравнение $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3ctgx-1$.

Решение. Левую часть уравнения преобразуем по формуле тангенса суммы и перейдем к новой переменной $y=tgx$. Получим для этой переменной уравнение:

$$\frac{y+1}{1-y}=\frac{3}{y}-1.$$

Из этого уравнения найдем $y = \frac{3}{5}$. Значит, $x = arctg\frac{3}{5} + \pi n$.

Ответ: $arctg\frac{3}{5} + \pi n$.

Задания и решения

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3}, \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{5}, \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{24}{7}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 8$, $y = 4$, $z = 6$.

Решение. Ясно, что ни одна из переменных не равна нулю. Поэтому переменные можно найти, складывая два уравнения и вычитая из полученной суммы третье уравнение. Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3}, \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{5}, \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{24}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{24}. \end{cases} \quad \begin{matrix} \dfrac{2}{y}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{2}{z}=-\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{24} \\ x=8. \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=4, \\ z=6, \end{matrix}$$

2. Две группы учащихся 7 и 8 человек принимали участие в парном соревновании по разгадыванию математических головоломок (по одному участнику от каждой команды на одну головоломку). В конце игры каждый назвал количество своих партнеров: 3,3,3,3,3,5,6,6,6,6,6,6,6,6,6. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Ответ. Да, кто-то ошибся.

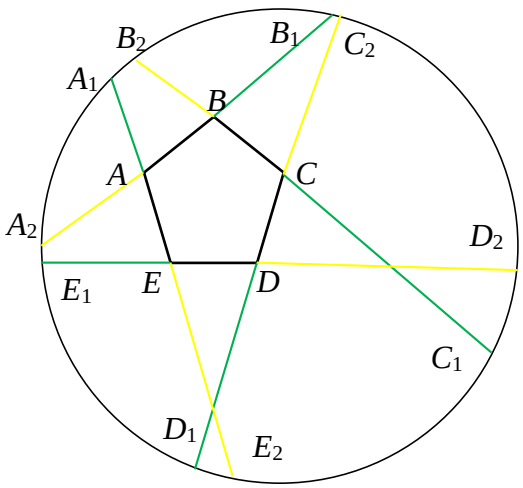
Решение. Каждая группа разгадывала 37 головоломок. Значит 7 из названных чисел должны давать сумму равную 37, и оставшиеся 8 чисел также должны давать сумму, равную 37. Число 5 попадет в одну из этих групп, а другая группа будет состоять из слагаемых, кратных трём, т.е. общая сумма будет кратна трём, а 37 на три не делится.

3. Может ли вершина параболы $y = 4x^2–4(a+1)x+a$ при каком-нибудь значении a находиться во второй четверти?

Ответ: Не может.

Решение. Дискриминант трёхчлена $4x^2–4(a+1)x+a$, равный $16(a^2+a+1)$, положителен при любом a, ибо $a^2+a+1 = (a+0{,}5)^2+0{,}75$. Значит, у данного трёхчлена при любом значении a — два корня. Поскольку ветви параболы $y = 4x^2–4(a+1)x+a$ направлены вверх, её вершина в таком случае лежит ниже оси абсцисс, и потому не может находиться во второй четверти.

4. Все вершины правильного пятиугольника $ABCDE$ расположены внутри окружности. Продолжения сторон AB, BC, CD, DE, EA за вершины B, C, D, E, A соответственно, до пересечения с окружностью окрашены в зеленый цвет. Продолжения этих же сторон за вершины A, B, C, D, E соответственно, до пересечения с окружностью окрашены в желтый цвет. Докажите, что сумма длин зеленых отрезков равна сумме длин желтых отрезков.



Доказательство. Пусть зеленые продолжения сторон AB, BC, CD, DE, EA правильного пятиугольника пересекают окружность в точках B_1, C_1, D_1, E_1, A_1, а желтые продолжения сторон пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 соответственно. Пусть сторона правильного пятиугольника равна a. Каждая вершина пятиугольника является точкой пересечения двух хорд окружности, а следовательно, для отрезков хорд выполняется свойство: произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды. Запишем эти равенства:

$$AA_2 \cdot (AB + BB_1) = AA_1 \cdot (AE + EE_2), \quad (1)$$

$$BB_2 \cdot (BC + CC_1) = BB_1 \cdot (BA + AA_2), \quad (2)$$

$$CC_2 \cdot (CD + DD_1) = CC_1 \cdot (CB + BB_2), \quad (3)$$

$$DD_2 \cdot (DE + EE_1) = DD_1 \cdot (DC + CC_2), \quad (4)$$

$$EE_2 \cdot (EA + AA_1) = EE_1 \cdot (ED + DD_2). \quad (5)$$

Заменим в формулах (1)-(5) $AB=BC=CD=DE=EA=a$, раскроем скобки и просуммируем левые и правые части соответственно:

$$a(AA_2 + BB_2 + CC_2 + DD_2 + EE_2) + AA_2 \cdot BB_1 + BB_2 \cdot CC_1 + CC_2 \cdot DD_1 + DD_2 \cdot EE_1 + EE_2 \cdot AA_1 =$$

$$= a(AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 + EE_1) + AA_1 \cdot EE_2 + BB_1 \cdot AA_2 + CC_1 \cdot BB_2 + DD_1 \cdot CC_2 + EE_1 \cdot DD_2.$$

Приведение подобных слагаемых и сокращение на a в полученном соотношении дает требуемое равенство:

$$AA_2 + BB_2 + CC_2 + DD_2 + EE_2 = AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 + EE_1.$$

5. Укажите две последние цифры в записи числа $11^{10} - 1$.

Ответ: 00

Решение. Заметим, что

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1).$$

Первый множитель в правой части равен 10, второй множитель – заканчивается цифрой 0, так как представляет собой сумму десяти слагаемых, каждое из которых заканчивается единицей. Таким образом, произведение заканчивается двумя нулями.

6. Существует ли натуральное число n, при котором справедливо неравенство

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n} > 2021\,?$$

Ответ. Да, например, $n = 2^{4040}$.

Решение. Заметим, что $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 2$, аналогично,

$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2^{N-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^N}}_{2^{N-1}\text{ слагаемых}} > \frac{1}{2^N}+\ldots+\frac{1}{2^N} = \frac{2^{N-1}}{2^N} = \frac{1}{2}$ (N - натуральное число). Таким образом, имеем

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{N-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^N}\right)>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{=\frac{1}{2}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^N}+\ldots+\frac{1}{2^N}\right)}_{=\frac{1}{2}}=S$$

Выбирая N, мы имеем возможность получать сколь угодно большое значение S:

$$S=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{N-слагаемых}=1+\frac{1}{2}\cdot N.$$

Пусть $S = 2021$, тогда $S=1+\frac{1}{2}\cdot 4040$ и $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{4040}}>2021$.

Дополнительные критерии	**баллы**
Проведено доказательство существования и предложен пример / приведён пример и выполнены вычисления, показывающие верность примера	7
Есть доказательство, но нет примера	5
Есть утверждение о сколь угодно большом значении предложенной суммы без доказательства	1

7. Алладин нашёл в Волшебной пещере 10 кг драгоценностей (различные изделия, камни и слитки). Каждая драгоценная единица не превышала по весу 1 кг. Чтобы незаметно вынести из пещеры найденный клад, Алладин должен брать с собой не более 3 кг за один заход. Какое наименьшее количество раз он должен сходить в Волшебную пещеру, чтобы незаметно вынести все найденные драгоценности?

Драгоценности должны быть вынесены из пещеры в неизменном виде.

Ответ: пять раз

Решение. *Пример*. Каждый раз из первых четырёх заходов, Алладин может выносить более 2 кг драгоценностей, т.е. за первые четыре посещения Волшебной пещеры он незаметно вынесет по крайней мере 8 кг. Оставшиеся драгоценности, весом менее 2 кг он вынесет на пятый раз.

Оценка. Покажем, что четырёх заходов может не хватить. Действительно, если бы каждая драгоценная единица имела вес $\frac{10}{13}$ кг, то за один раз он мог бы незаметно вынести из пещеры только 3 изделия, т.е. за четыре раза 12 из 13 драгоценных единиц.

Дополнительные критерии	**баллы**
Пример без оценки	3
Оценка без примера	5

8. Найдите сумму квадратов действительных корней уравнения

$$x^5-4x+2=x^4+x^2.$$

Решение. $x^5-x^4-x^2-4x+2=0$. Применим теорему Виета для уравнения пятой степени

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5=0, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+x_2x_4x_5+x_3x_4x_5+x_1x_4x_5=1, \\ x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5=-4, \\ x_1x_2x_3x_4x_5=-2. \end{cases}$$

Найдем сумму квадратов пяти слагаемых:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-$$
$$-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5),$$

Подставив соответствующие значения из системы уравнений, получим требуемое значение:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=1.$$

Ответ: 1.

Анализ и правильное решение. В приведённом решении не учтено требование отыскать сумму квадратов *действительных* корней уравнения.

Заметим, что $x^5-x^4-x^2-4x+2=(x^3-x^2-2x+1)\cdot(x^2+2)=0$. Рассмотрим сколько действительных корней у уравнения $x^3-x^2-2x+1=0$.

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2-4x+2)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2-4x+2)=+\infty$, $f(0)=1$, $f(1)=1^3-1^2-2+1=-1$, получаем, что график рассматриваемой функции пересекает ось x трижды, следовательно уравнение $x^3-x^2-2x+1=0$ будет иметь три действительных корня, которые в свою очередь и будут действительными корнями данного уравнения. Сумму квадратов этих корней определим, используя теорему Виета для кубического уравнения:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2, \\ x_1x_2x_3=-1. \end{cases}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

Подставив соответствующие значения из системы уравнений, получим требуемое значение:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=5.$$

Ответ: 5.

9. Положительные числа x, y, z таковы, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$?

Ответ: 0

Решение. Заметим, что $\frac{x^2}{y+z}+x=\frac{x^2+xy+xz}{y+z}=\frac{x}{y+z}\cdot(x+y+z)$. Аналогично $\frac{y^2}{x+z}+y=\frac{y}{x+z}\cdot(x+y+z)$ и $\frac{z^2}{x+y}+z=\frac{z}{x+y}\cdot(x+y+z)$. Суммируя почленно три равенства, получим $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+(x+y+z)=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\cdot(x+y+z)$. Далее,

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-1\right)\cdot(x+y+z)$. Учитывая, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$, получаем ответ.

Анализ и правильное решение. Рассуждения в приведенном решении ошибок не содержит. По-видимому, некорректно условие задачи. Это можно обосновать по-разному.

Первый способ. Преобразуем равенство из условия: $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1 \Leftrightarrow x\cdot(x+z)\cdot(x+y)+y\cdot(y+z)\cdot(y+x)+z\cdot(z+x)\cdot(z+y)=(x+y)\cdot(y+z)\cdot(x+z).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равенство $x^3+y^3+z^3+3xyz=0$, которое не может быть верным при положительных значениях всех переменных.

Второй способ. Докажем, что при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Пусть $x+y=a, y+z=b, z+x=c,$ тогда $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$. Выразим x, y и z:

$x=\frac{a+c-b}{2}$, $y=\frac{a+b-c}{2}$, $z=\frac{b+c-a}{2}$. Таким образом,

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)=$$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-3\right)\geq\frac{1}{2}\cdot(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$ (сумма обратных положительных чисел больше или равна двум).

10. Решите уравнение $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3ctgx-1$.

Решение. Левую часть уравнения преобразуем по формуле тангенса суммы и перейдем к новой переменной $y=tgx$. Получим для этой переменной уравнение:

$$\frac{y+1}{1-y}=\frac{3}{y}-1.$$

Из этого уравнения найдем $y=\frac{3}{5}$. Значит, $x=arctg\frac{3}{5}+\pi n$.

Ответ: $arctg\frac{3}{5}+\pi n.$

Анализ и правильное решение. При таком решении происходит сужение области определения функций, входящих в уравнение, и теряется серия $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Для исправления ошибки достаточно дополнить решение рассмотрением случая $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ и убедиться, что эта серия тоже входит в ответ.

Дополнительные критерии	**баллы**
Приведено только верное решение, без указания на ошибку	3
Указано качестве ошибки, что *n* должно быть целым	1