ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ от А до Я 2018

И. В. Ященко
С. А. Шестаков

ГЕОМЕТРИЯ

ОГЭ 2018

ФГОС

МОДУЛЬНЫЙ КУРС

ГЕОМЕТРИЯ

- методические рекомендации с разбором задач
- тренинги к каждому заданию
- тренировочные варианты в формате ОГЭ-2018

И. В. Ященко, С. А. Шестаков

ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс

Геометрия

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Я97

Ященко И. В., Шестаков С. А.

Я97 ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия. — М.: МЦНМО, 2018. — 120 с.

ISBN 978-5-4439-1198-4

Настоящее пособие предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике. Пособие содержит методические рекомендации с разбором типовых примеров к каждому заданию ОГЭ, подготовительные и зачётные тренинги к каждому заданию ОГЭ, тренировочные работы в формате ОГЭ, соответствующие текущим спецификации и демоверсии экзаменационной работы.

Такая структура пособия представляется универсальной, она позволяет познакомиться со всем спектром заданий открытого банка ОГЭ по математике и методами их решения, обеспечить качественную и полноценную подготовку к экзамену на любом уровне.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

ISBN 978-5-4439-1198-4

Предисловие

Настоящее пособие является второй частью модульного курса «ОГЭ по математике от А до Я» и предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике (модуль «Геометрия», задания 9—13 первой части варианта ОГЭ по математике и задания 24—26 второй его части). В последние годы определилась устойчивая структура экзамена: экзаменационный вариант состоит из 26 заданий, каждое из которых может быть отнесено к одному из трёх модулей: «Реальная математика», «Алгебра», «Геометрия». Вариант экзаменационной работы содержит как задания базового уровня (с кратким ответом), так и задания повышенного и высокого уровней сложности (задания с развёрнутым решением). Задания 9—13 модуля «Геометрия» являются заданиями базового уровня, задания 24—26 — заданиями повышенного и высокого уровней сложности.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть пособия содержит описание типов и особенностей заданий демоверсии и открытого банка задач (именно на его основе формируются варианты экзаменационной работы), методические рекомендации и примеры решения задач модуля «Геометрия» открытого банка. Наряду с методическими рекомендациями и большим числом разобранных примеров она включает в себя 16 тренингов из 10 задач каждый: по два тренинга к каждому из заданий 9—13 и 24—26 ОГЭ по математике, составляющих модуль «Геометрия», для отработки навыков их решения.

При самостоятельной работе с пособием следует сначала прочитать методические рекомендации к соответствующему заданию ОГЭ, затем попытаться выполнить подготовительные задания (они составляют первый тренинг) и понять, какие задачи решены неправильно. Повторив теоретический материал и ещё раз обратившись при необходимости к методическим рекомендациям, следует выполнить зачётные задания (они составляют второй тренинг). Отметим, что задания в пособии подобраны так, чтобы познакомить читателя со всем спектром задач соответствующего модуля открытого банка ОГЭ по математике и по окончании работы с пособием чувствовать себя на экзамене уверенно и спокойно. Вторую часть пособия составили тренировочные варианты ОГЭ по математике (модуль «Геометрия»).

Надеемся, что пособие окажется полезным как выпускникам основной школы, так учителям и методистам, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Пособие может быть использовано для организации итогового повторения (в том числе, с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену в 9 классе.

Авторы глубоко признательны и благодарны О. А. Васильевой за внимательное и вдумчивое чтение рукописи, замечания и предложения, в значительной степени способствовавшие улучшению пособия.

Задание 9

Краткие методические рекомендации

Задание 9 ОГЭ по математике открывает блок геометрических задач в типовом экзаменационном варианте. Это несложная планиметрическая задача в одно-два действия, проверяющая владение базовыми знаниями по теме «Треугольники». Для успешного решения задачи достаточно знать, чему равна сумма углов треугольника, что такое медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника, какова связь между длинами средней линии треугольника и параллельной ей стороны, уметь применять теорему Пифагора для вычисления одной из сторон прямоугольного треугольника по двум другим его сторонам, понимать, что такое равнобедренный и равносторонний треугольники, и уметь применять их простейшие свойства к решению задач.

Напомним основные факты, связанные с треугольниками:

- сумма углов треугольника равна 180°;
- внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов треугольника;
- высоты треугольника пересекаются в одной точке;
- биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром вписанной окружности треугольника);
- серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром описанной окружности треугольника);
- медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершин треугольника;
- средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Если a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, α, β, γ — противолежащие этим сторонам углы, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, S — его площадь, то справедливы следующие формулы:

1) $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$;

2) $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$;

3) $S=\dfrac{abc}{4R}$;

4) $S = pr$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

В прямоугольном треугольнике один из катетов можно считать высотой, а другой — основанием. Поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Разумеется, все остальные формулы площади треугольника применимы и к прямоугольному треугольнику.

Пример 1. Сумма длин средних линий треугольника равна 11. Найдите периметр этого треугольника.

Решение. Поскольку сторона треугольника вдвое больше параллельной ей средней линии, сумма длин сторон треугольника, т. е. его периметр, также будет вдвое больше суммы длин средних линий этого треугольника. Поэтому искомый периметр равен 22.

Ответ. 22.

Пример 2. Один из углов треугольника на 15° больше среднего арифметического двух других его углов. Найдите этот угол. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть α, β, γ — углы данного треугольника и

$$\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2} + 15^\circ.$$

Тогда $\beta + \gamma = 2\alpha - 30^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому

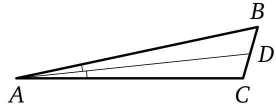
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

и, следовательно,

$$\alpha + 2\alpha - 30^\circ = 180^\circ, \quad \text{т. е.} \quad 3\alpha = 210^\circ \quad \text{и} \quad \alpha = 70^\circ.$$

Ответ. 70.

Пример 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, угол C равен 106°, угол CAD равен 6°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

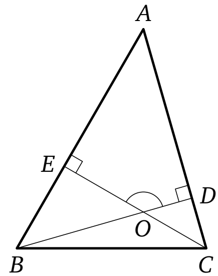


Решение. Поскольку AD — биссектриса угла BAC, он вдвое больше угла CAD, т. е. равен 12°. Но тогда

$$\angle B = 180^\circ - \angle BAC - \angle C = 180^\circ - 12^\circ - 106^\circ = 62^\circ.$$

Ответ. 62.

Пример 4. В треугольнике ABC угол A равен $46°$, углы B и C острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

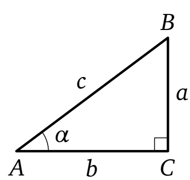


Решение. Поскольку в четырёхугольнике $ADOE$ два угла прямые, сумма двух других углов равна $180°$. Поэтому

$$\angle DOE = 180° - \angle A = 180° - 46° = 134°.$$

Ответ. 134.

Особое место среди всех треугольников занимает *прямоугольный* треугольник. Для прямоугольного треугольника справедлива теорема Пифагора, а синус, косинус или тангенс его острого угла можно найти как отношение катета к гипотенузе или катета к катету. Таким образом, для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c справедливы следующие основные формулы:



- $a^2+b^2=c^2$ — теорема Пифагора;
- $S=\frac{1}{2}ab$;
- середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, т. е. является центром описанной окружности треугольника, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы: $R=\frac{c}{2}$;
- $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$.

Пример 5. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8, а гипотенуза равна 17. Найдите второй катет этого треугольника.

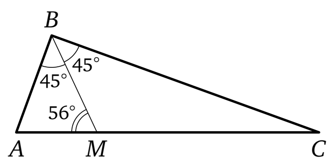
Решение. При решении этой задачи вполне можно обойтись без рисунка. Из теоремы Пифагора следует, что второй катет этого треугольника равен

$$\sqrt{17^2-8^2} = \sqrt{(17-8)(17+8)} = \sqrt{9\cdot 25} = 3\cdot 5 = 15.$$

Ответ. 15.

Пример 6. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника образует с его гипотенузой угол 56°. Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, ACB — его меньший угол, а биссектриса угла ABC пересекает гипотенузу в точке M.



Тогда $\angle BMA = 56°$. Поскольку этот угол — внешний угол треугольника BMC, он равен сумме углов MBC и MCB. Таким образом,

$$\angle MCB = \angle AMB - \angle MBC = 56° - 45° = 11°.$$

Ответ. 11.

Пример 7. Высота BH прямого угла прямоугольного треугольника ABC делит его гипотенузу на отрезки $AH = 2$ и $CH = 8$. Найдите длину этой высоты.

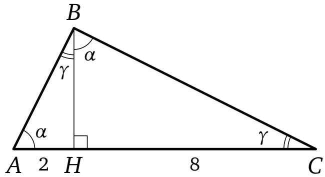
Решение. Обозначим острые углы A и C данного треугольника через α и γ соответственно. Так как эти углы дополняют друг друга до 90°, получаем также, что $\angle ABH = \gamma$, $\angle CBH = \alpha$. Для решения задачи можно воспользоваться подобием треугольников ABH и BCH, откуда $\frac{BH}{CH} = \frac{AH}{BH}$, либо тригонометрическими функциями острых углов прямоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{CH}{BH}.$$

В любом случае получаем, что

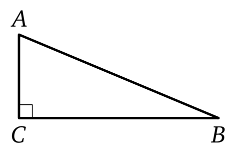
$$BH^2 = AH\cdot CH$$

(квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу), откуда $BH^2=2\cdot 8=16$ и $BH=4$.



Ответ. 4.

Пример 8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A=\frac{12}{13}$, $AC=10$. Найдите BC.



Решение. Задачу можно решить несколькими способами, например, так. Поскольку $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{12}{13}$, можно считать, что $BC=12x$, $AB=13x$. По теореме Пифагора $(12x)^2+10^2=(13x)^2$, откуда $x=2$, и, следовательно, $BC=24$.

Ответ. 24.

Важным частным случаем треугольника является также *равнобедренный* треугольник. В таком треугольнике углы при основании равны, а высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой, поэтому именно на ней находятся центры вписанной и описанной окружностей этого треугольника. Частный случай равнобедренного треугольника — *равносторонний* треугольник. В нём уже каждая высота является медианой и биссектрисой, поэтому центры вписанной и описанной окружностей совпадают и $R=2r$.

Пример 9. Найдите угол C треугольника ABC, если $AB=BC$, а внешний угол при вершине B равен 76°. Ответ дайте в градусах.

Решение. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних не смежных с ним углов. Поэтому сумма углов при основании данного равнобедренного треугольника равна 76°, а каждый из них равен половине этой величины, т. е. 38°.

Ответ. 38.

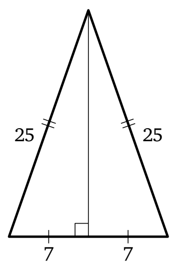
Пример 10. Найдите периметр равностороннего треугольника, если одна из его средних линий равна 25.

Решение. Поскольку все стороны равностороннего треугольника равны и каждая из них вдвое больше его средней линии, длина стороны данного равностороннего треугольника будет равна 50, а его периметр — 150.

Ответ. 150.

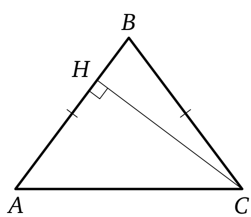
Пример 11. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к его основанию, если боковые стороны треугольника равны 25, а основание равно 14.

Решение. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является и его медианой и, следовательно, делит основание пополам. Поэтому длину высоты можно найти как длину катета прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 25, а второй катет равен 7. Получим, что в силу теоремы Пифагора искомая длина равна $\sqrt{25^2-7^2}=24$.



Ответ. 24.

Пример 12. В треугольнике ABC известно, что $AB=BC$, $AC=15$, высота CH равна 12. Найдите синус угла ACB.



Решение. Поскольку $\angle ACB=\angle CAB$, синусы этих углов также равны:

$$\sin\angle ACB = \sin\angle CAB = \frac{CH}{AC} = \frac{12}{15} = 0{,}8.$$

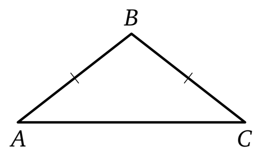
Ответ. 0,8.

Подготовительные задачи

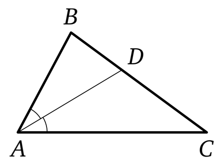
1. В треугольнике два угла равны 27° и 79°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

2. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 43°. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.

3. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 104^\circ$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



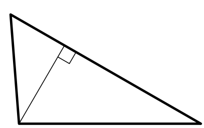
4. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 62^\circ$, AD — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



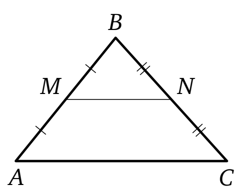
5. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Найдите гипотенузу этого треугольника.

6. В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 12 и 20 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

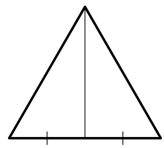
7. Сторона треугольника равна 29, а высота, проведённая к этой стороне, равна 12. Найдите площадь этого треугольника.



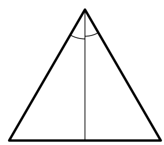
8. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 21, сторона BC равна 22, сторона AC равна 28. Найдите MN.



9. Сторона равностороннего треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите медиану этого треугольника.



10. Биссектриса равностороннего треугольника равна $15\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

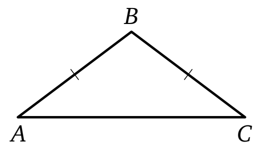


Зачётные задачи

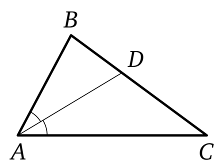
1. В треугольнике два угла равны 36° и 73°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

2. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 18°. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.

3. В треугольнике ABC известно, что $AB=BC$, $\angle ABC=128^\circ$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



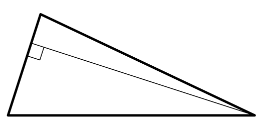
4. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC=68^\circ$, AD — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



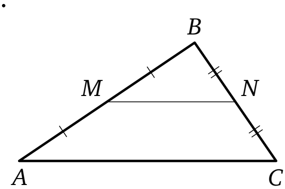
5. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите гипотенузу этого треугольника.

6. В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 16 и 34 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

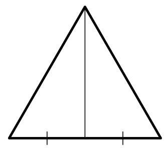
7. Сторона треугольника равна 14, а высота, проведённая к этой стороне, равна 31. Найдите площадь этого треугольника.



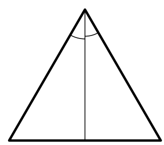
8. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 28, сторона BC равна 19, сторона AC равна 34. Найдите MN.



9. Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите медиану этого треугольника.



10. Биссектриса равностороннего треугольника равна $11\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



Задание 10

Краткие методические рекомендации

Задание 10 ОГЭ по математике представляет собой задачу, связанную с окружностями и их элементами. Приведём основные факты по теме «Окружность и круг»:

• центральный угол окружности измеряется дугой этой окружности, на которую он опирается;

• вписанный угол окружности равен половине центрального угла и измеряется половиной дуги, на которую он опирается;

• вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен $90°$;

• касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания;

• отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны;

• центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла;

• угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися внутри окружности, равен полусумме дуг, высекаемых на окружности вертикальными углами, образованными этими секущими;

• угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися вне окружности, равен полуразности дуг, высекаемых на окружности углом, образованным этими секущими;

• две окружности не имеют общих точек в том и только том случае, если расстояние между их центрами больше суммы радиусов этих окружностей или меньше разности большего и меньшего радиусов;

• две окружности имеют ровно две общие точки (пересекаются в двух точках) в том и только том случае, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов этих окружностей, но больше разности большего и меньшего радиусов;

• две окружности имеют ровно одну общую точку (касаются) в том и только том случае, если расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей (внешнее касание) либо равно разности большего и меньшего радиусов этих окружностей (внутреннее касание);

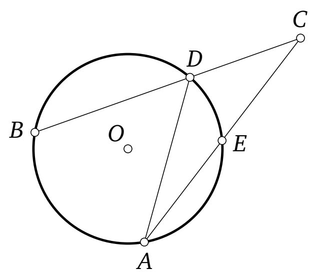
• длина окружности равна $2\pi r$, где r — радиус окружности;

• площадь круга равна πr^2, где r — радиус круга.

Пример 1. Окружность пересекает стороны угла величиной 33° с вершиной C в точках A, E, D и B, как показано на рисунке. Найдите угол ADB, если угол EAD равен 22°. Ответ дайте в градусах.

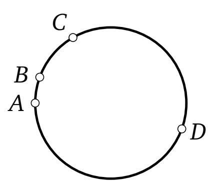
Решение. Рассмотрим треугольник ACD. Угол ADB является для него внешним при вершине D, значит, он равен сумме двух других углов треугольника, не смежных с ним:

$$\angle ADB = \angle C + \angle EAD = 33^\circ + 22^\circ = 55^\circ.$$



Ответ. 55.

Пример 2. Точки A, B, C и D, последовательно расположенные на окружности в указанном порядке, делят её на четыре дуги, градусные меры которых относятся как $1:2:7:8$ (дуга AB наименьшая). Найдите градусную меру дуги BD, содержащей точку C.



Решение. Обозначим градусную меру дуги AB через x. Тогда градусные меры дуг BC, CD и DA равны соответственно $2x$, $7x$ и $8x$. В сумме эти четыре дуги составляют окружность. Поэтому

$$x + 2x + 7x + 8x = 18x = 360^\circ,$$

откуда $x = 20^\circ$. Тогда $\smile BD = 2x + 7x = 9x = 180^\circ$.

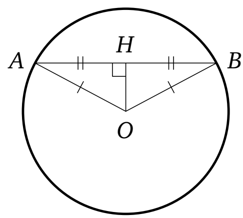
Ответ. 180.

Пример 3. Длина окружности равна $6\sqrt{\pi}$. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

Решение. Обозначим радиус окружности через r. Длина окружности равна $2\pi r = 6\sqrt{\pi}$, откуда $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$. Площадь круга радиуса $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ равна $\pi r^2 = \pi\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 9$.

Ответ. 9.

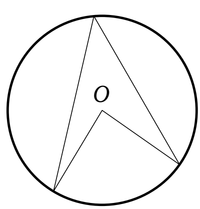
Пример 4. Расстояние от центра окружности до хорды длиной 30 равно 8. Найдите радиус окружности.



Решение. Пусть AB — данная хорда окружности с центром O. Тогда $OA = OB = R$. Поскольку треугольник OAB равнобедренный, его высота OH (которая является также медианой и биссектрисой) и будет расстоянием от центра окружности до хорды. Значит, $OH = 8$, $AH = 15$, а искомый радиус OA находится по теореме Пифагора для треугольника OHA и будет равен $\sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$.

Ответ. 17.

Пример 5. Центральный угол на 43° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности.



а) Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

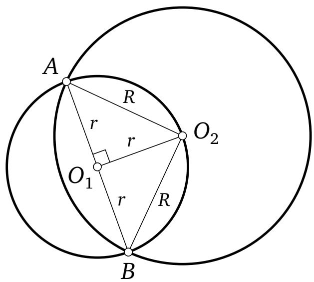
б) Найдите центральный угол. Ответ дайте в градусах.

Решение. Обозначим градусную меру вписанного угла через x, тогда градусная мера центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и вписанный угол, будет равна $2x$. По условию $2x = x + 43$, откуда $x = 43$, а $2x = 86$.

Ответ. а) 43; б) 86.

Пример 6. Окружность с центром O_1 и радиусом $\sqrt{8}$ проходит через центр O_2 второй окружности и пересекает эту окружность в точках A и B. Найдите радиус второй окружности, если известно, что точка O_1 лежит на отрезке AB.

Решение. Несмотря на достаточно длинное условие, задача является довольно простой. Обозначим радиус первой окружности через r, радиус второй окружности через R и рассмотрим равнобедренный треугольник AO_2B с боковыми сторонами $AO_2 = O_2B = R$. Из условия следует, что $O_1A = O_1B = O_1O_2 = r$, откуда $R = r\sqrt{2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$.



Ответ. 4.

Приведём основные факты, связанные с окружностью, вписанной в треугольник:

• в любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну;

• центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения его биссектрис;

• радиус вписанной окружности равностороннего треугольника равен одной трети его биссектрисы (напомним, что она же является медианой и высотой равностороннего треугольника);

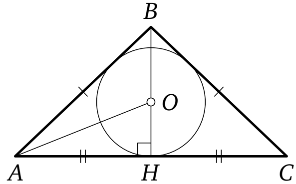
• площадь S треугольника равна произведению полупериметра p этого треугольника на радиус r вписанной окружности этого треугольника: $S = pr$.

Пример 7. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, одна из медиан которого равна 15.

Решение. В равностороннем треугольнике все медианы равны и являются также биссектрисами и высотами. Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника равен трети его биссектрисы и в данном случае равен 5.

Ответ. 5.

Пример 8. Расстояние от вершины A равнобедренного треугольника ABC до центра O вписанной в него окружности равно 29, а длина основания AC треугольника равна 42. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.



Решение. Пусть BH — медиана, высота и биссектриса данного равнобедренного треугольника. Тогда $O \in BH$, $AO = 29$, $AH = 21$ и искомый радиус OH можно найти по теореме Пифагора для треугольника AOH. Получим $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$.

Ответ. 20.

Напомним основные факты, связанные с окружностью, описанной около треугольника:

• около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну;

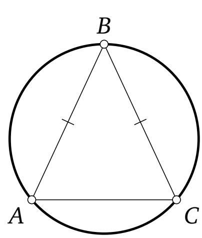
• центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;

• радиус описанной окружности равностороннего треугольника равен двум третям его высоты (напомним, что она же является медианой и биссектрисой равностороннего треугольника);

• центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина его гипотенузы, а радиус окружности равен половине гипотенузы;

• площадь S треугольника может быть найдена по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, R — радиус описанной окружности треугольника.

Пример 9. Найдите угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если сторона AB треугольника стягивает дугу описанной около него окружности, равную $130°$.



Решение. По условию стороны AB и BC равны, значит, они стягивают равные дуги. Но тогда градусная величина дуги AC, не содержащей точки B, будет равна

$$360^\circ - 2\cdot 130^\circ = 100^\circ.$$

Вписанный угол ABC равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен 50°.

Ответ. 50.

Пример 10. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 9 и 40.

Решение. Поскольку центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина его гипотенузы, а радиус R окружности равен половине гипотенузы, для решения задачи достаточно с помощью теоремы Пифагора найти длину гипотенузы и поделить её на 2. Получим

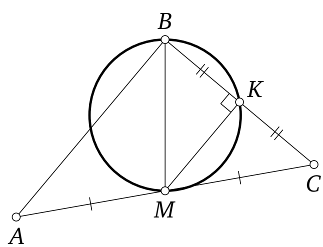
$$R = \frac{1}{2}\sqrt{9^2+40^2} = \frac{1}{2}\cdot 41 = 20{,}5.$$

Ответ. 20,5.

Пример 11. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Длина стороны AC равна 7. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть K — середина BC. Тогда угол BKM прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Значит, MK является медианой и высотой треугольника BMC. Поэтому треугольник BMC равнобедренный. Следовательно, $MB = MC = MA$, и точка M — центр описанной окружности треугольника ABC, радиус которой равен

$$MC = 0{,}5AC = 3{,}5.$$



Ответ. 3,5.

Напомним основные факты, связанные с окружностью, вписанной в четырёхугольник:

• в четырёхугольник можно вписать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных сторон равны;

• центром вписанной окружности четырёхугольника является точка пересечения биссектрис его углов:

• в параллелограмм можно вписать окружность, только если он является ромбом;

• в любой ромб (а значит, и в квадрат) можно вписать окружность; центром этой окружности является точка пересечения диагоналей ромба;

• радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата;

• если в трапецию можно вписать окружность, то диаметр этой окружности равен высоте трапеции;

• площадь S четырёхугольника, в который можно вписать окружность (описанного четырёхугольника), равна произведению полупериметра p этого четырёхугольника на радиус r вписанной окружности этого четырёхугольника:

$$S = pr.$$

Пример 12. Найдите периметр трапеции, в которую вписана окружность, если средняя линия трапеции равна 33.

Решение. По свойству описанного четырёхугольника сумма оснований данной трапеции равна сумме её боковых сторон. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, значит, сумма оснований равна 66, как и сумма боковых сторон. Следовательно, периметр трапеции равен

$$66 + 66 = 132.$$

Ответ. 132.

Укажем теперь основные факты, связанные с окружностью, описанной около четырёхугольника:

• около четырёхугольника можно описать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных углов равны (т. е. каждая из этих сумм равна 180°);

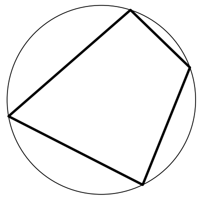
• центром описанной окружности четырёхугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам:

• около параллелограмма можно описать окружность, только если он является прямоугольником;

• около любого прямоугольника (а значит, и квадрата) можно описать окружность; центром этой окружности является точка пересечения диагоналей прямоугольника, а её радиус равен половине диагонали прямоугольника;

• около трапеции можно описать окружность в том и только том случае, если она равнобедренная.

Пример 13. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 67° и 89°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

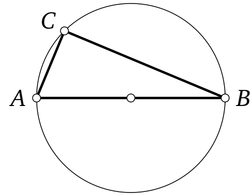


Решение. Поскольку сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180°, меньший из двух других его углов равен $180^\circ - 89^\circ = 91^\circ$.

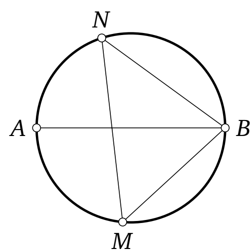
Ответ. 91.

Подготовительные задачи

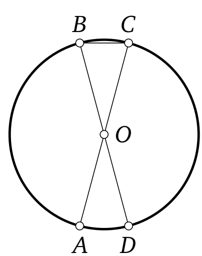
1. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 13. Найдите AC, если $BC = 24$.



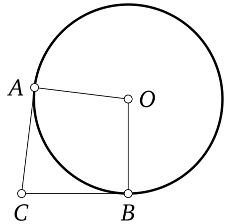
2. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что $\angle NBA = 36^\circ$. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.



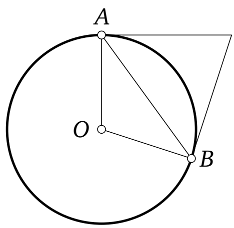
3. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 79°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



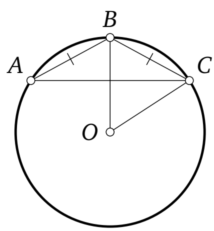
4. В угол C величиной 83° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, точка O — центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



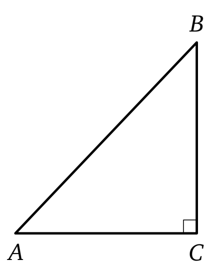
5. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом $72°$. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



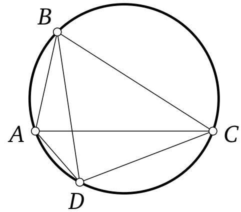
6. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 125°$. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



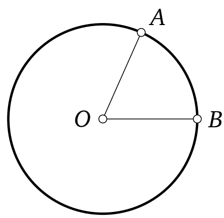
7. В треугольнике ABC известно, что $AC = 20$, $BC = 21$, угол C равен $90°$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



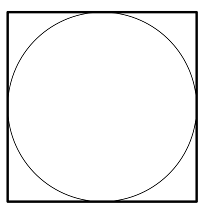
8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 70°, угол CAD равен 49°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



9. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 66^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 99. Найдите длину большей дуги AB.

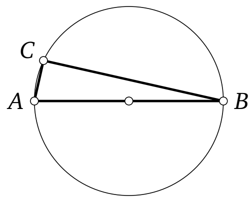


10. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 4.

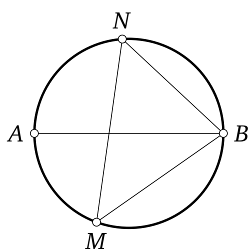


Зачётные задачи

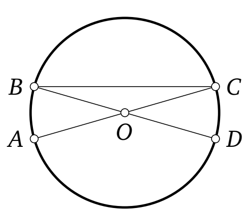
1. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 20,5. Найдите BC, если $AC = 9$.



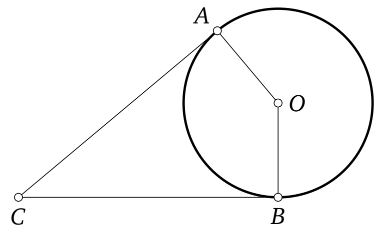
2. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что $\angle NBA = 43^\circ$. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.



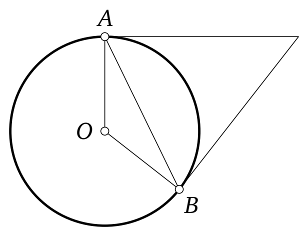
3. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 16°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



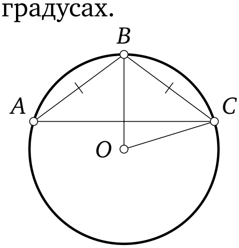
4. В угол C величиной 40° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, точка O — центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



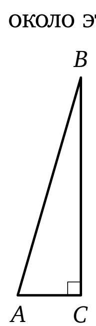
5. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 52°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



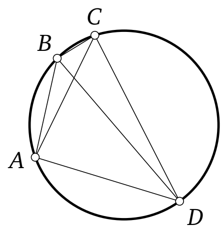
6. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 107^\circ$. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



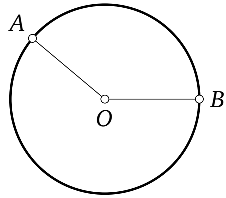
7. В треугольнике ABC известно, что $AC = 7$, $BC = 24$, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



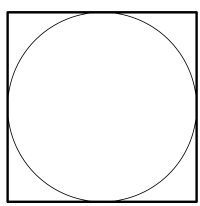
8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 134°, угол CAD равен 81°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



9. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 140^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 98. Найдите длину большей дуги AB.



10. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 7.



Задание 11

Краткие методические рекомендации

Задание 11 ОГЭ по математике представляет собой задачу по теме «Четырёхугольники». Напомним свойства и теоремы, связанные с четырёхугольниками, изучаемыми в основной школе.

Сначала приведём основные факты, связанные с параллелограммом:

• противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;

• сумма углов параллелограмма равна 360°;

• сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной из его сторон, равна 180°;

• диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

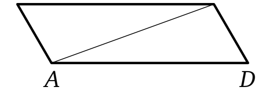
Пусть a и b — длины двух смежных сторон параллелограмма, h_a и h_b — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, γ — угол между этими сторонами, S — площадь параллелограмма. Основные формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S = ah_a = bh_b; \quad S = ab\sin\gamma.$$

Кроме того, для параллелограмма, разумеется, справедлива и формула площади произвольного выпуклого четырёхугольника: если d_1 и d_2 — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника, γ — угол между ними, то площадь S этого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей четырёхугольника на синус угла между ними, т. е.

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma.$$

Пример 1. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 110° и 10°. Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAC = 110^\circ$, $\angle CAD = 10^\circ$. Тогда $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 110^\circ + 10^\circ = 120^\circ$, Следовательно, $\angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Значит, меньший угол параллелограмма равен 60°.

Ответ. 60.

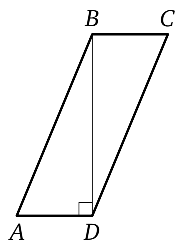
Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый и $\sin A = 0{,}8$. Вычислите $6\operatorname{tg} B$.

Решение. Поскольку $\sin A = 0{,}8$ и угол A острый, получим, что $\cos A = \sqrt{1-(0{,}8)^2} = 0{,}6$, а $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$. Углы A и B прилежат к одной стороне параллелограмма, поэтому их сумма равна 180°. Но тогда

$$6\operatorname{tg} B = 6\operatorname{tg}(180^\circ - \angle A) = -6\operatorname{tg} A = -6\cdot\frac{4}{3} = -8.$$

Ответ. -8.

Пример 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, в котором $AB = 13$, $AD = 5$, $BD = 12$.



Решение. Задачу можно решать разными способами. По следствию теоремы косинусов для треугольника ABD можно найти косинус угла A, затем его синус, после чего вычислить площадь параллелограмма как произведение двух сторон на синус угла между ними. А можно заметить, что $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ и, значит, $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABD прямоугольный с прямым углом D, т. е. диагональ BD параллелограмма является его высотой. Поэтому площадь S параллелограмма находится по формуле $S = AD\cdot BD = 5\cdot 12 = 60$.

Ответ. 60.

Пример 4. Стороны параллелограмма равны 12 и 18, а одна из высот равна 2. Найдите площадь параллелограмма, если известно, что другая его высота меньше 2.

Решение. Пусть h — вторая высота параллелограмма, S — его площадь. Тогда либо $S = 12h = 18\cdot 2 = 36$, откуда $h = 3 > 2$, либо $S = 18h = 12\cdot 2 = 24$, откуда $h = \frac{4}{3} < 2$. Условию задачи удовлетворяет только $h = \frac{4}{3}$, поэтому $S = 24$.

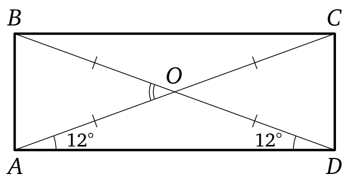
Ответ. 24.

Важнейшими частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб, квадрат. Они обладают всеми свойствами параллелограмма, но для них справедливы и некоторые дополнительные свойства, которыми произвольные параллелограммы не обладают:

- диагонали прямоугольника (а значит, и квадрата) равны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) взаимно перпендикулярны.

Площадь S прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон a и b, т. е. $S=ab$. Площадь S квадрата равна квадрату его стороны a, т. е. $S=a^2$. Для вычисления площадей прямоугольника и ромба можно использовать формулу площади выпуклого четырёхугольника. Поскольку диагонали d_1 и d_2 ромба взаимно перпендикулярны, из последней следует, что площадь ромба равна полупроизведению его диагоналей: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$.

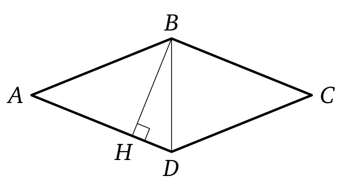
Пример 5. Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол 12°. Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей, и пусть $\angle CAD = 12°$. Поскольку диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, треугольник AOD равнобедренный, причём $\angle ODA = \angle OAD = 12°$. Значит, $\angle AOD$ тупой и не может быть углом между прямыми (напомним, что угол между двумя прямыми — меньший из вертикальных углов, образуемых при их пересечении, поэтому он не превосходит 90°). Следовательно, искомый угол равен внешнему углу треугольника AOD (например, углу AOB) и, значит, равен сумме внутренних не смежных с ним углов, т. е. сумме $\angle ODA + \angle OAD = 24°$.

Ответ: 24.

Пример 6. В ромбе $ABCD$ угол A равен 44°. Из вершины B проведена высота BH к стороне AD. Найдите угол HBD. Ответ дайте в градусах.



Решение. В ромбе все стороны равны, значит, треугольник BAD равнобедренный и $\angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BHD. Острый угол HDB в нём равен 68°, значит, угол HBD равен 22°.

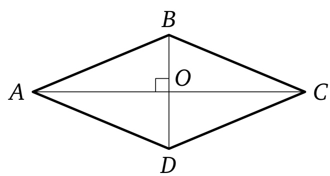
Ответ. 22.

Пример 7. Диагональ квадрата равна $7\sqrt{2}$. Найдите его площадь.

Решение. Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше его стороны, значит, сторона этого квадрата равна 7, а площадь квадрата равна 49.

Ответ: 49.

Пример 8. Найдите площадь ромба, если его диагональ равна 24, а сторона равна 13.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб, O — точка пересечения его диагоналей, и пусть $AB = BC = CD = AD = 13$, $AC = 24$. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = 12$, а треугольник AOB прямоугольный. Из теоремы Пифагора для этого треугольника находим

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Тогда $BD = 10$, а площадь S ромба находится как половина произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120.$$

Ответ. 120.

Трапеция является более сложным четырёхугольником по сравнению с параллелограммом, поскольку у неё параллельны только две стороны (основания трапеции), а две другие не параллельны (боковые стороны трапеции).

Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, называется прямоугольной; трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной (диагонали такой трапеции равны, углы при любом из оснований также равны).

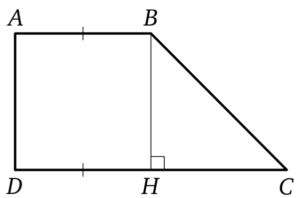
Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Пример 9. Сумма трёх углов равнобедренной трапеции равна 222°. Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение. Сумма всех углов трапеции равна 360°, значит, её четвёртый угол равен $360^\circ - 222^\circ = 138^\circ$. Угол, прилежащий к той же боковой стороне, что и найденный, равен $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$. Два оставшихся угла также равны 138° и 42°, поскольку в равнобедренной трапеции углы, прилежащие к основанию, равны. Значит, искомый угол этой трапеции равен 42°.

Ответ. 42.

Пример 10. Найдите острый угол прямоугольной трапеции, основания которой равны 18 и 9 и меньшая боковая сторона равна 9. Ответ дайте в градусах.



Решение. В любой прямоугольной трапеции два угла прямые, один тупой, и один острый. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$, в которой $AB = AD = 9$, $CD = 18$. Искомый угол — угол C. Проведём высоту BH. Она равна AD и равна 9. Тогда $DH = AB = 9$ (как противоположные стороны прямоугольника $ABHD$), и, значит, $CH = CD - DH = 9$. Но тогда в прямоугольном треугольнике BHC катеты равны, значит, это равнобедренный прямоугольный треугольник, и угол C равен 45°.

Ответ. 45.

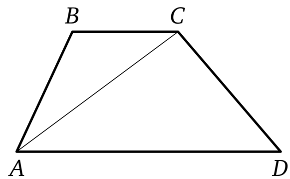
Пример 11. Основания трапеции относятся как $1:3$, а средняя линия равна 16. Найдите большее основание этой трапеции.

Решение. Пусть основания трапеции равны a и b, причём $a = 3b$. Тогда её средняя линия равна $\frac{a+b}{2} = \frac{3b+b}{2} = 2b = 16$, откуда $b = 8$. Значит, $a = 24$.

Ответ. 24.

Пример 12. Основания трапеции относятся как $2:5$. Диагональ делит трапецию на два треугольника, площадь меньшего из которых равна 4. Найдите площадь трапеции.

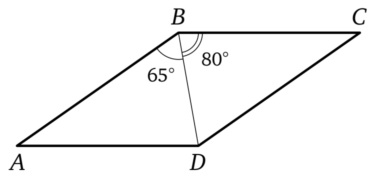
Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, считая, что $AD:BC = 5:2$. Диагональ AC делит трапецию на два треугольника, имеющих общую высоту — высоту трапеции. Значит, их площади относятся как основания, к которым проведена эта высота, т. е. как основания трапеции. При этом треугольник меньшей площади будет иметь меньшее основание. Тогда $S_{ABC}=4$, $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{5}{2}$, откуда $S_{ACD}=\frac{5}{2}S_{ABC}=10$. Следовательно, $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=14$.



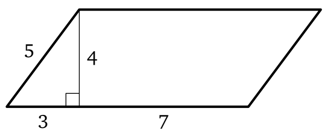
Ответ. 14.

Подготовительные задачи

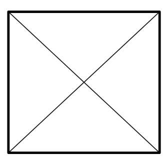
1. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные $65°$ и $80°$. Найдите меньший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



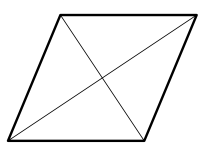
2. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



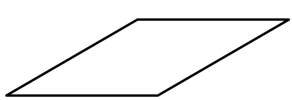
3. Диагональ прямоугольника образует угол $47°$ с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



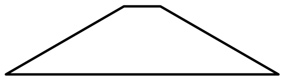
4. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 6.



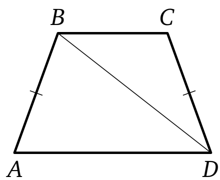
5. Периметр ромба равен 24, а один из углов равен $30°$. Найдите площадь этого ромба.



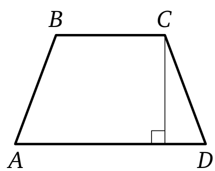
6. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 50°. Найдите больший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



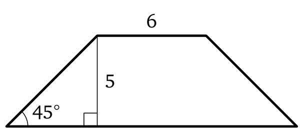
7. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BDA = 38^\circ$ и $\angle BDC = 32^\circ$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



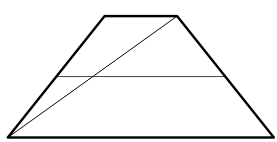
8. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины C, делит основание AD на отрезки длиной 3 и 11. Найдите длину основания BC.



9. В равнобедренной трапеции известны высота, меньшее основание и угол при основании (см. рисунок). Найдите большее основание.

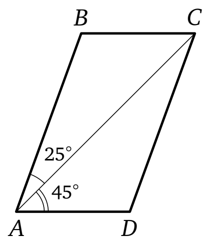


10. Основания трапеции равны 3 и 11. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

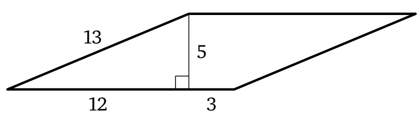


Зачётные задачи

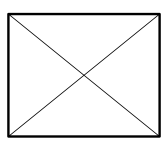
1. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные $45°$ и $25°$. Найдите больший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



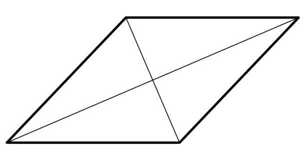
2. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



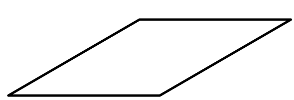
3. Диагональ прямоугольника образует угол $51°$ с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



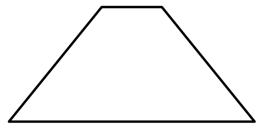
4. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.



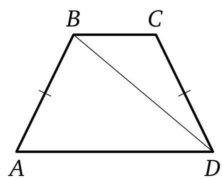
5. Периметр ромба равен 36, а один из углов равен $30°$. Найдите площадь этого ромба.



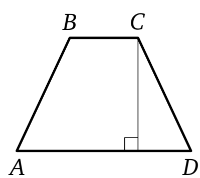
6. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 102°. Найдите больший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



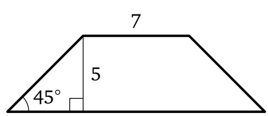
7. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BDA = 40°$ и $\angle BDC = 24°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



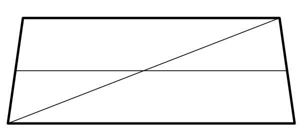
8. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины C, делит основание AD на отрезки длиной 8 и 15. Найдите длину основания BC.



9. В равнобедренной трапеции известны высота, меньшее основание и угол при основании (см. рисунок). Найдите большее основание.



10. Основания трапеции равны 17 и 19. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

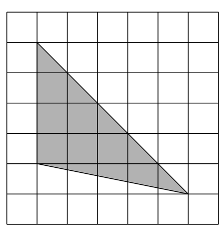


Задание 12

Краткие методические рекомендации

Задание 12 ОГЭ по математике представляет собой задачу по планиметрии на вычисление по готовому чертежу, изображённому на клетчатой бумаге. Данные в таких задачах даются в виде чертежа на бумаге в клетку, причём размеры клеток одинаковы и заданы условием. Это задачи на вычисление углов, расстояний, площадей, связанные со всеми изучаемыми в школьном курсе фигурами. Клетки в таких задачах по сути выполняют роль линейки: посчитав «по клеточкам» необходимые длины и используя известные геометрические факты и свойства, можно довольно быстро получить ответ на вопрос задачи. К этим задачам вплотную примыкают задания на вычисление элементов плоских фигур по готовому чертежу, на котором указаны координаты некоторых точек фигуры (например, вершин треугольника или четырёхугольника), позволяющие после выполнения несложных вычислений ответить на вопрос задачи. При этом, как правило, не требуется применения дополнительных формул метода координат.

Пример 1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

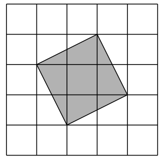


Решение. Длина стороны треугольника, расположенной на вертикальной линии сетки, равна 4 см, а длина проведённой к ней высоты (заметим, что основание высоты будет расположено на продолжении указанной стороны) равна 5 см. Поэтому искомая площадь равна

$$0{,}5 \cdot 4 \cdot 5 = 10 \text{ см}^2.$$

Ответ. 10.

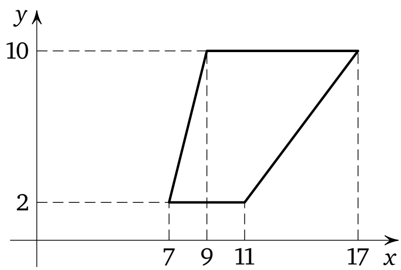
Пример 2. Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение. Площадь квадрата равна квадрату его стороны, а квадрат стороны в данном случае можно найти по теореме Пифагора, он будет равен 2^2+1^2, т. е. 5.

Ответ. 5.

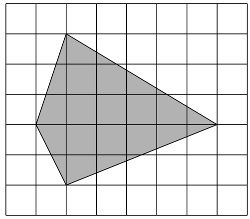
Пример 3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Решение. Основания трапеции равны 4 и 8, высота равна 8. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}(4+8)\cdot 8=48$.

Ответ. 48.

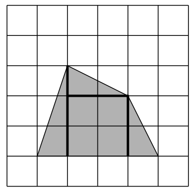
Пример 4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



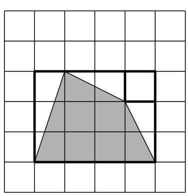
Решение. Диагонали изображённого на рисунке четырёхугольника взаимно перпендикулярны, их длины равны 5 и 6. Поэтому площадь четырёхугольника будет равна половине произведения его диагоналей: $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$.

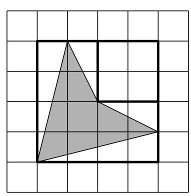
Ответ. 15.

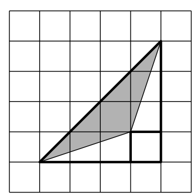
В некоторых случаях подобные задачи можно решать, разбивая данную фигуру на прямоугольные треугольники и прямоугольники, площади которых легко вычислить:



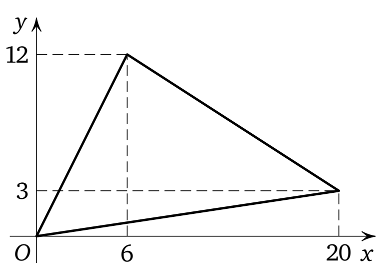
Если четырёхугольник не является выпуклым или если угол между его диагоналями отличен от прямого, но его вершины являются линиями сетки, можно дополнить этот четырёхугольник до прямоугольника, проведя через его вершины прямые по линиям сетки. После этого из площади полученного прямоугольника нужно вычесть площади «дополняющих» фигур, которыми будут прямоугольные треугольники и прямоугольники. Эту же идею можно использовать и при вычислении площадей треугольников с вершинами в узлах сетки, если стороны треугольника не лежат на линиях сетки:



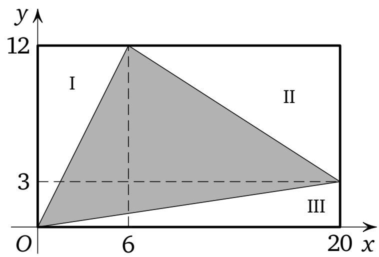




Пример 5. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



Решение. Применим идею, о которой говорилось выше: дополним данный треугольник до прямоугольника, проведя через его вершины прямые, параллельные координатным осям:



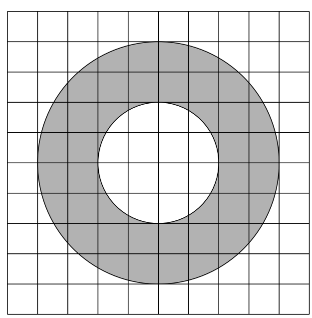
Искомая площадь S равна разности площади полученного прямоугольника и суммы площадей прямоугольных треугольников, отмеченных цифрами I, II и III и дополняющих данный треугольник до прямоугольника:

$$S = 12\cdot 20 - \left(\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 9 + \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 3\right) = 240 - 129 = 111.$$

Ответ. 111.

Теперь рассмотрим задачу на применение формулы площади круга.

Пример 6. Найдите площадь кольца, изображённого на рисунке, если площадь круга, ограниченного большей окружностью, равна 132.

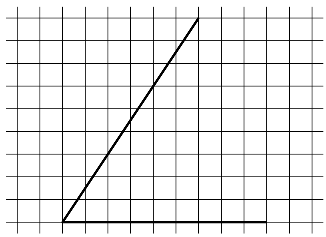


Решение. Радиусы кругов отличаются в два раза: у внутреннего радиус равен 2 клеткам, а у внешнего — 4. Значит, площадь меньшего круга меньше площади большего в 4 раза, то есть равна $\frac{132}{4} = 33$. Площадь заштрихованной области равна разности площадей внешнего и внутреннего кругов: $132 - 33 = 99$.

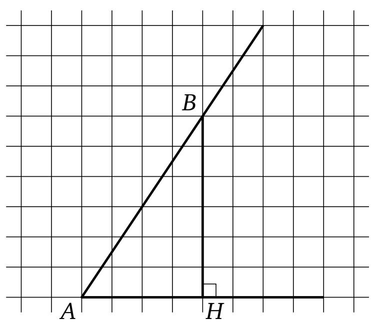
Ответ. 99.

В заключение рассмотрим задачу на вычисление тангенса угла, изображённого на бумаге в клетку.

Пример 7. Найдите тангенс угла, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.



Решение. Если построить прямоугольный треугольник, каждый из катетов которого измеряется целым числом делений сетки, так, чтобы данный угол был острым углом этого треугольника, то решить задачу удастся без труда. Для этого достаточно на «наклонной» стороне угла выбрать точку, являющуюся пересечением горизонтальной и вертикальной линий сетки (такие точки называют узлами сетки). Выберем одну из них, обозначим её буквой B, опустим из неё перпендикуляр BH на «горизонтальную» сторону угла, а вершину угла обозначим буквой A.

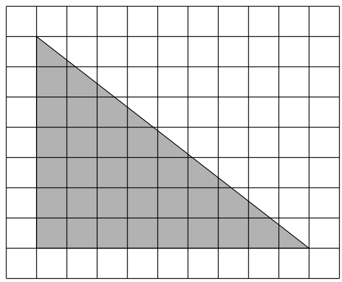


Искомый тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg}\angle BAH = \frac{BH}{HA} = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

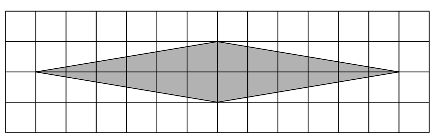
Ответ. 1,5.

Подготовительные задачи

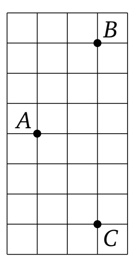
1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите длину его меньшего катета.



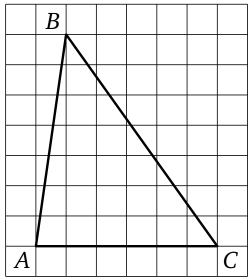
2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите длину его меньшей диагонали.



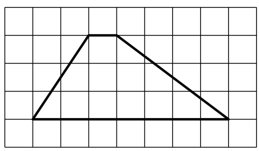
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены три точки: A, B и C. Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC.



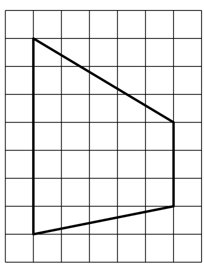
4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC.



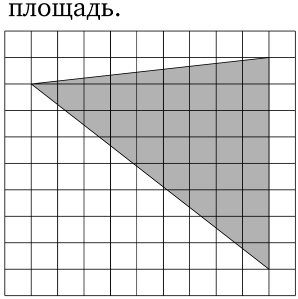
5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



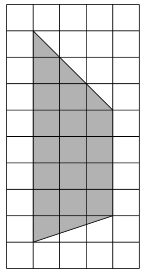
6. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



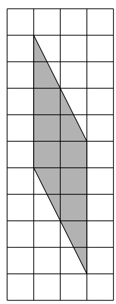
7. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



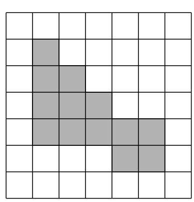
8. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



9. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

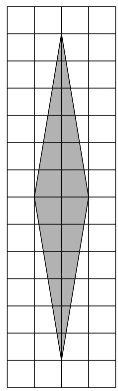


10. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.

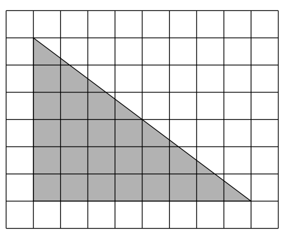


Зачётные задачи

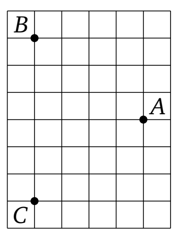
1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали.



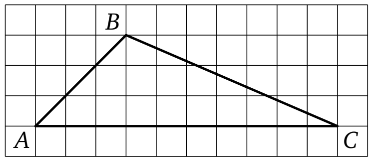
2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите длину его меньшего катета.



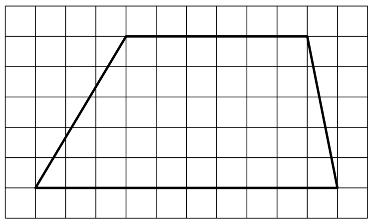
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены три точки: A, B и C. Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC.



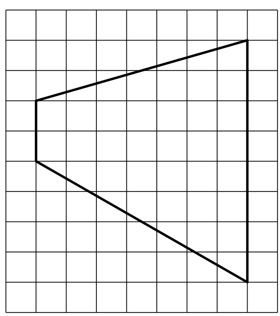
4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC.



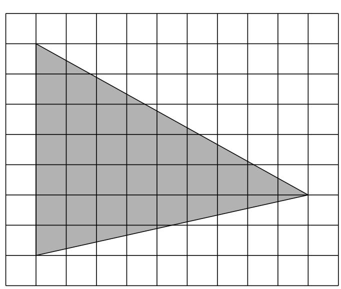
5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



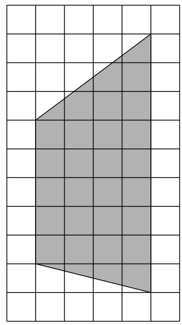
6. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



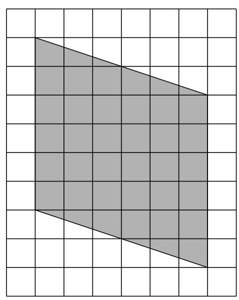
7. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



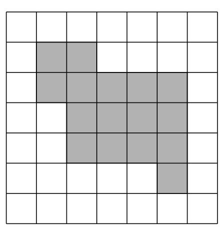
8. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



9. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



10. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.



Задание 13

Краткие методические рекомендации

Задание 13 ОГЭ по математике заключается в выборе одного или нескольких верных утверждений из множества данных (в настоящее время — из трёх данных). В большинстве случаев правильный ответ на вопрос задачи связан со знанием простейших геометрических фактов и утверждений. Такие задачи позволяют организовать экспресс-повторение большинства определений и теорем школьного курса геометрии с целью быстрой диагностики имеющихся пробелов в знаниях и последующего устранения этих пробелов. В качестве примеров рассмотрим чуть более сложные задания на выбор верных утверждений из шести данных.

Пример 1. Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих дополнительных символов номера верных утверждений.

1) Существует прямоугольник, диагонали которого различны.
2) В любом прямоугольнике диагонали равны.
3) Существует ромб, диагонали которого различны.
4) В любом ромбе диагонали равны.
5) Существует трапеция, диагонали которой различны.
6) В любой трапеции диагонали равны.

Решение. По свойству прямоугольника второе утверждение является верным, а первое — нет. Аналогично из оставшихся утверждений верными являются 3 и 5.

Ответ. 235.

Пример 2. Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих дополнительных символов номера верных утверждений.

1) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого острые.
2) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы острые.
3) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого прямые.
4) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы прямые.
5) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого тупые.
6) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы тупые.

Решение. Первое утверждение не является верным, поскольку сумма любых четырёх острых углов меньше 360° — суммы углов выпуклого четырёхугольника. Второе утверждение не является верным, пример — квадрат. Третье утверждение является верным, пример — прямоугольник. Четвёртое утверждение не является верным, пример — трапеция. Пятое утверждение не является верным, поскольку сумма любых четырёх тупых углов больше 360° — суммы углов выпуклого четырёхугольника. По этой же причине не является верным и шестое утверждение.

Ответ. 3.

Подготовительные задачи

1. Какие из следующих утверждений верны?

1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.
2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является ромбом.
3) Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

2. Какое из следующих утверждений верно?

1) Вертикальные углы равны.
2) Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.
3) Диагонали трапеции пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

3. Какое из следующих утверждений верно?

1) Площадь квадрата равна произведению его диагоналей.
2) В параллелограмме есть два равных угла.
3) Боковые стороны любой трапеции равны.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

4. Какое из следующих утверждений верно?

1) Диагонали трапеции пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
2) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей.
3) Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

5. Какие из следующих утверждений верны?

1) Существуют три прямые, которые проходят через одну точку.
2) Боковые стороны любой трапеции равны.
3) Сумма углов равнобедренного треугольника равна 180 градусам.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. Какие из следующих утверждений верны?

1) Треугольника со сторонами 1 см, 2 см, 4 см не существует.
2) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту.
3) Все диаметры окружности равны между собой.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

7. Какое из следующих утверждений верно?

1) Центр описанной около треугольника окружности всегда лежит внутри этого треугольника.
2) В параллелограмме есть два равных угла.
3) Сумма углов любого треугольника равна 360 градусам.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

8. Какие из следующих утверждений верны?

1) Любые два равносторонних треугольника подобны.
2) В любом прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны.
3) Все диаметры окружности равны между собой.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

9. Какие из следующих утверждений верны?

1) Существует квадрат, который не является прямоугольником.
2) Если в параллелограмме две соседние стороны равны, то этот параллелограмм является ромбом.
3) Все диаметры окружности равны между собой.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

10. Какое из следующих утверждений верно?

1) Любой параллелограмм можно вписать в окружность.
2) Касательная к окружности параллельна радиусу, проведённому в точку касания.
3) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

Зачётные задачи

1. Какие из следующих утверждений верны?

1) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна сумме катетов.
2) Если в ромбе один из углов равен 90 градусам, то этот ромб является квадратом.
3) Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

2. Какое из следующих утверждений верно?

1) Любой прямоугольник можно вписать в окружность.
2) Все углы ромба равны.
3) Треугольник со сторонами 1, 2, 4 существует.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

3. Какое из следующих утверждений верно?

1) Смежные углы всегда равны.
2) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его высотой.
3) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

4. Какое из следующих утверждений верно?

1) Основания любой трапеции параллельны.
2) Диагонали ромба равны.
3) Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

5. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
2) Средняя линия трапеции параллельна её основаниям.
3) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. Какие из следующих утверждений верны?

1) Средняя линия трапеции равна сумме её оснований.
2) Все углы прямоугольника равны.
3) Существуют три прямые, которые проходят через одну точку.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

7. Какое из следующих утверждений верно?

1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную этой прямой.
2) Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны.
3) Смежные углы всегда равны.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

8. Какое из следующих утверждений верно?

1) Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны.
2) Площадь ромба равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.
3) Смежные углы всегда равны.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

9. Какие из следующих утверждений верны?

1) В любой прямоугольной трапеции есть два равных угла.
2) Касательная к окружности параллельна радиусу, проведённому в точку касания.
3) Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

10. Какое из следующих утверждений верно?

1) Центр описанной около треугольника окружности всегда лежит внутри этого треугольника.
2) Через заданную точку плоскости можно провести только одну прямую.
3) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

Задание 24

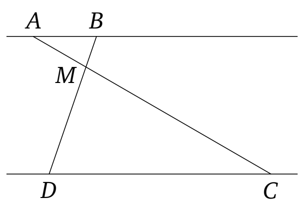
Краткие методические рекомендации

Задание 24 ОГЭ по математике открывает условный блок из трёх геометрических задач с развёрнутым решением, традиционно представленных в качестве трёх последних заданий ОГЭ по математике. Это планиметрическая задача на вычисление, для решения которой нужно достаточно свободно ориентироваться в материале школьного курса планиметрии, в его теоремах, связанных с треугольниками, многоугольниками (преимущественно с параллелограммами и трапециями) и окружностями. Приведём примеры типичных задач по каждой из обозначенных тем.

Треугольники

Пример 1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB=14$, $DC=42$, $AC=52$.

Решение.



Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC (см. рисунок), углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{CD}=\frac{14}{42}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

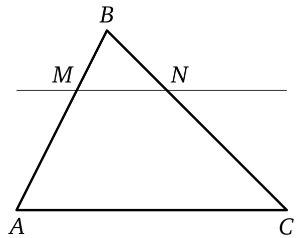
$$AC=AM+MC=\frac{1}{3}MC+MC=\frac{4}{3}MC,$$

откуда $MC=\frac{3AC}{4}=39$.

Ответ. 39.

Пример 2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN=17$, $AC=51$, $NC=32$.

Решение.



Поскольку прямая MN параллельна прямой AC, углы BNM и BCA равны как соответственные при параллельных прямых AC и MN и секущей BC. Следовательно, треугольники ABC и MBN подобны по двум углам.

Значит, $\frac{BC}{BN}=\frac{AC}{MN}=\frac{51}{17}=3$, а поскольку

$$\frac{BC}{BN}=\frac{BN+NC}{BN}=1+\frac{32}{BN},$$

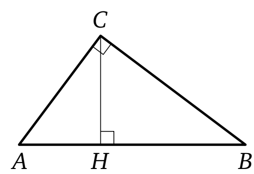
получаем

$$BN=\frac{32}{2}=16.$$

Ответ. 16.

Пример 3. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 и 24. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

Решение.

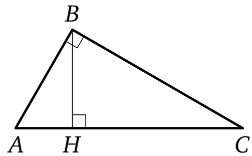


Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катеты AC и BC равны 18 и 24 соответственно. Тогда гипотенуза $AB=30$. С одной стороны, площадь треугольника равна половине произведения катетов, а с другой стороны, она равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведённую к ней. Значит, высота CH, проведённая к гипотенузе, равна $\frac{18\cdot 24}{30}=14{,}4$.

Ответ. 14,4.

Пример 4. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH=6$, $AC=24$.

Решение.



Поскольку BH — высота треугольника ABC, прямоугольные треугольники ABC и AHB подобны.

Следовательно,

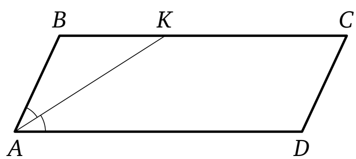
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}, \quad \text{откуда} \ AB = \sqrt{AC \cdot AH} = 12.$$

Ответ. 12.

Параллелограммы и трапеции

Пример 5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=7$, $CK=12$.

Решение. Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK, AK — биссектриса угла BAD, следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный, и $AB = BK = 7$.



По формуле периметра параллелограмма находим

$$P_{ABCD} = 2(AB+BC) = 52.$$

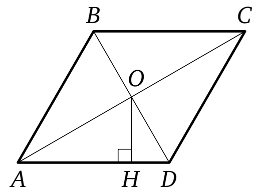
Ответ. 52.

Пример 6. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.

Решение. Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, а отрезок OH — высота треугольника AOD, причём

$$AC = 60, \quad OH = 15.$$

Тогда в прямоугольном треугольнике AOH гипотенуза AO вдвое больше катета OH, значит, угол OAH равен 30°.

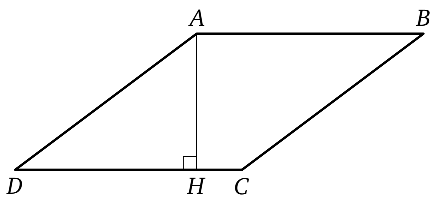


Диагонали ромба делят его углы пополам, следовательно, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$, а $\angle ABC = \angle ADC = 120°$.

Ответ. 60°; 120°; 60°; 120°.

Пример 7. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 8$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Решение. Поскольку $ABCD$ — ромб, $AD = DC = DH + HC = 10$.



Треугольник ADH прямоугольный, поэтому

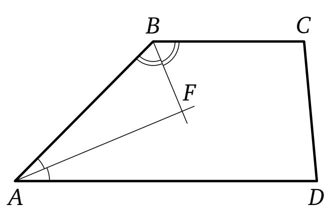
$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 6.$$

Ответ. 6.

Пример 8. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 24$, $BF = 10$.

Решение. Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°, значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD) = 90°.$$



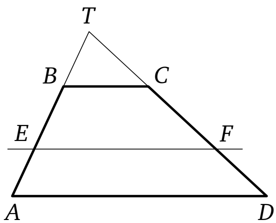
Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F. По теореме Пифагора находим AB:

$$AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{24^2+10^2}=26.$$

Ответ. 26.

Пример 9. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD=42$, $BC=14$, $CF:DF=4:3$.

Решение. Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD. Поскольку прямые AD, EF и BC параллельны, треугольники ATD, ETF и BTC подобны. Следовательно, $\frac{TD}{TC}=\frac{AD}{BC}=3$, откуда $CD=2TC$, $CF=\frac{4}{7}CD=\frac{8}{7}TC$, а значит, $TF=\frac{15}{7}TC$.

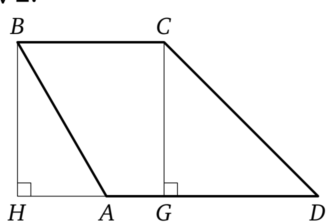


Получаем $\frac{EF}{BC}=\frac{TF}{TC}=\frac{15}{7}$, откуда $EF=30$.

Ответ. 30.

Пример 10. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135°, а $CD=36$.

Решение. Проведём перпендикуляры BH и CG к прямой AD. В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен 45°, следовательно, $CG=CD\cdot\cos 45^\circ=18\sqrt{2}$.



В прямоугольном треугольнике ABH катет

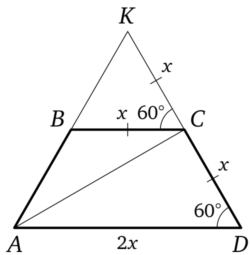
$$BH=CG=18\sqrt{2},$$

а угол ABH равен 30°. Значит, $AB=\frac{BH}{\cos 30^\circ}=\frac{18\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=12\sqrt{6}$.

Ответ. $12\sqrt{6}$.

Пример 11. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен $60°$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите периметр трапеции.

Решение.



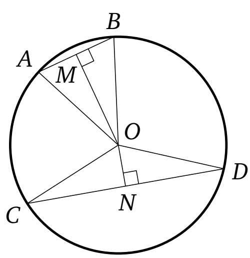
Пусть K — точка пересечения прямых AB и DC, и пусть $BC = CD = x$. Тогда $AD = 2x$ и BC — средняя линия треугольника AKD. Поэтому $KC = CD = x$ и треугольник AKD равносторонний. Следовательно, AC — его медиана и высота. Значит, $AD \sin 60° = AC$, то есть $2x\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, откуда $x = 2$. Но тогда $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$ и периметр трапеции равен 10.

Ответ. 10.

Окружности

Пример 12. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 10$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 5.

Решение. Пусть $OM = 12$ и $ON = 5$ — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.



Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем

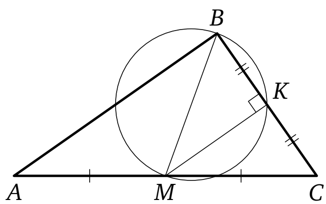
$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 13.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 13$, откуда $CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = 12$. Получаем, что $CD = 2CN = 24$.

Ответ. 24.

Пример 13. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Длина стороны AC равна 4. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

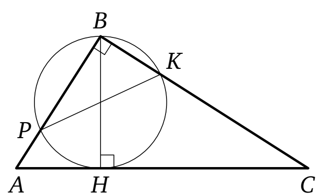
Решение. Пусть K — середина BC. Тогда угол BKM прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Значит MK является медианой и высотой треугольника BMC. Поэтому треугольник BMC равнобедренный. Следовательно, $MB = MC = MA$, и точка M — центр описанной окружности треугольника ABC, радиус которой равен $MC = 0{,}5AC = 2$.



Ответ. 2.

Пример 14. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 14$.

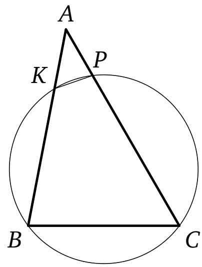
Решение. Угол PBK опирается на дугу PK и равен $90°$, а значит, PK — диаметр, откуда получаем, что $PK = BH = 14$.



Ответ. 14.

Пример 15. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.

Решение. Четырёхугольник $BKPC$ вписан в окружность, значит, $\angle KBC + \angle KPC = 180°$. Углы APK и CPK смежные, значит, их сумма также равна 180°. Получаем, что $\angle KBC = \angle APK$.



В треугольниках ABC и APK угол A общий, $\angle KBC = \angle APK$, следовательно, эти треугольники подобны. Значит, $\dfrac{AK}{KP} = \dfrac{AC}{BC} = 1{,}5$, откуда получаем, что $KP = \dfrac{AK}{1{,}5} = 4$.

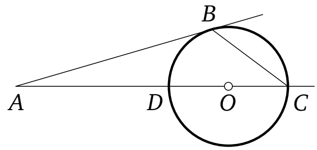
Ответ. 4.

Пример 16. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$, $AC = 12$.

Решение. Пусть окружность второй раз пересекает прямую AC в точке D, а $DC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем

$$AB^2 = AC(AC - x); \quad 81 = 12(12 - x),$$

откуда $x = 5{,}25$.



Ответ. 5,25.

Пример 17. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.

Решение. Пусть R — радиус описанной окружности, тогда

$$R = \frac{BC}{2\sin A}.$$

Получаем, что $BC = 8 \cdot 2 \cdot \sin(180^\circ - 71^\circ - 79^\circ) = 8 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 8$.

Ответ. 8.

Подготовительные задачи

1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите AC, если $AB=11$, $DC=22$, $MC=18$.

2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите CN, если $MN=13$, $AC=65$, $BN=7$.

3. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH=5$, $AC=20$.

4. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=8$, $CK=15$.

5. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH=8$ и $CH=9$. Найдите высоту ромба.

6. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD=60$, $BC=15$, $CF:DF=2:3$.

7. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, $AB=\sqrt{3}$. Найдите AC.

8. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 61° и 89°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 10.

9. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH=13$.

10. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=14$, а сторона AC в 2 раза больше стороны BC.

Зачётные задачи

1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите AC, если $AB=12$, $DC=48$, $MC=28$.

2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите CN, если $MN=14$, $AC=21$, $BN=20$.

3. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH=7$, $AC=28$.

4. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=5$, $CK=14$.

5. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH=12$ и $CH=3$. Найдите высоту ромба.

6. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD=25$, $BC=15$, $CF:DF=3:2$.

7. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, $BD=4\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции.

8. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 73° и 77°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 9.

9. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH=15$.

10. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=18$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC.

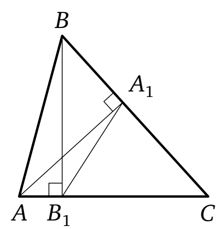
Задание 25

Краткие методические рекомендации

Задание 25 ОГЭ по математике представляет собой планиметрическую задачу на доказательство, связанную со свойствами треугольников, четырёхугольников, окружностей. Во многих случаях доказательство может быть проведено несколькими способами. Рассмотрим типичные примеры. Решение каждого из них основано на одном из возможных способов.

Треугольники

Пример 1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

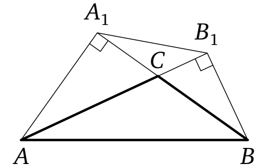


Решение. Диагонали четырёхугольника AB_1A_1B пересекаются, значит, он является выпуклым. Поскольку

$$\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ,$$

около четырёхугольника AB_1A_1B можно описать окружность. Следовательно, углы AA_1B_1 и ABB_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AB_1.

Пример 2. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

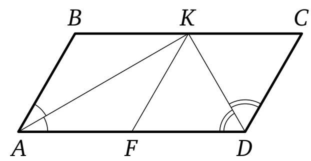


Решение. Поскольку угол ACB тупой, основания A_1 и B_1 высот лежат на продолжениях сторон BC и AC соответственно. Диагонали четырёхугольника AA_1B_1B пересекаются, поэтому он выпуклый.

Поскольку $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$, около четырёхугольника AA_1B_1B можно описать окружность. Значит, углы AB_1A_1 и ABA_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу A_1A. Аналогично $\angle BA_1B_1 = \angle BAB_1$. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум углам.

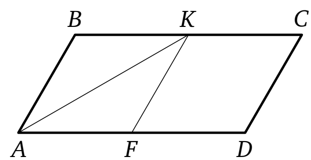
Четырёхугольники

Пример 3. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K — середина BC.



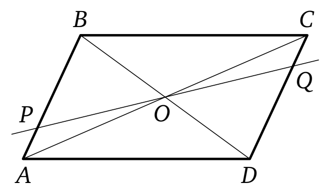
Решение. Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Тогда в каждом из параллелограммов $ABKF$ и $CDFK$ диагональ делит угол пополам, поэтому эти параллелограммы являются ромбами. Значит, $BK = KF = KC$. Следовательно, точка K — середина BC.

Пример 4. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.



Решение. Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.

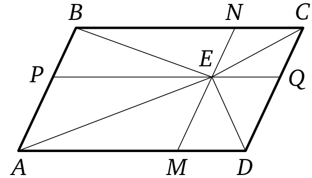
Пример 5. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.



Решение. В треугольниках BPO и DQO стороны BO и DO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle PBO = \angle QDO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, а $\angle POB = \angle QOD$ как вертикальные углы.

Значит, треугольники BPO и DQO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки BP и DQ равны.

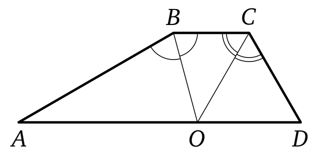
Пример 6. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.



Решение. Проведём через точку E прямые MN и PQ, параллельные сторонам параллелограмма (см. рисунок). Эти прямые разбивают исходный параллелограмм на четыре меньших, а отрезки EA, EB, EC, ED являются диагоналями этих параллелограммов и разбивают каждый из них на равные треугольники.

Пусть площади треугольников BEN, CEN, AEM и DEM равны S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно. Тогда площадь параллелограмма $ABCD$ равна $2(S_1+S_2+S_3+S_4)$, а сумма площадей треугольников BEC и AED равна $S_1+S_2+S_3+S_4$, что вдвое меньше площади параллелограмма $ABCD$.

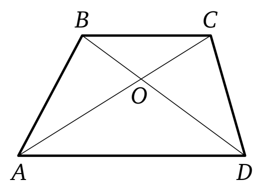
Пример 7. Биссектрисы углов B и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O, лежащей на стороне AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.



Решение. Точка O лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому эта точка равноудалена от прямых AB и BC. Аналогично точка O равноудалена от прямых BC и CD.

Значит, точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

Пример 8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

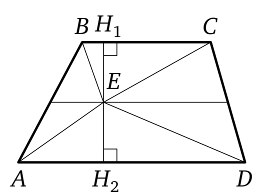


Решение. Расстояния от точек B и C до прямой AD равны, следовательно, площади треугольников ABD и ACD равны. Тогда

$$S_{AOB}=S_{ABD}-S_{AOD}=S_{ACD}-S_{AOD}=S_{COD}.$$

Значит, площади треугольников AOB и COD равны.

Пример 9. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.



Решение. Проведём через точку E высоту H_1H_2 трапеции. По теореме Фалеса средняя линия разделит высоту пополам.

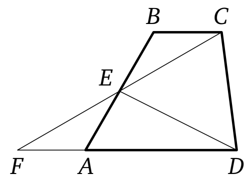
Пусть $EH_1=EH_2=h$. Тогда сумма площадей треугольников BEC и AED равна.

$$h\cdot\frac{BC}{2}+h\cdot\frac{AD}{2}=h\cdot\frac{BC+AD}{2}.$$

При этом площадь трапеции равна $2h\cdot\dfrac{BC+AD}{2}$, что как раз вдвое больше найденной суммы площадей треугольников.

Пример 10. Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции

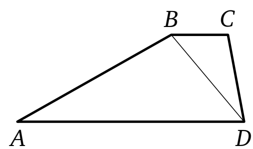
Решение. Пусть F — точка перечения прямых CE и AD. В треугольниках EFA и ECB стороны EA и EB равны по условию, углы при вершине E равны как вертикальные, а углы EBC и EAF равны как накрест



лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AB. Значит, треугольники EFA и ECB равны. Следовательно, их площади равны, поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника FCD.

Из равенства треугольников EFA и ECB вытекает, что $FE = EC$, поэтому DE — медиана в треугольнике FCD. Тогда площадь треугольника DEC равна половине площади треугольника FCD, а значит, и половине площади трапеции $ABCD$.

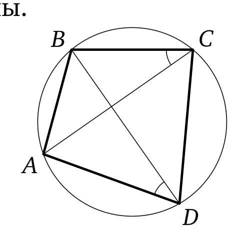
Пример 11. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 20, $BD = 10$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



Решение. В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD, и, кроме того, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{DB}{BC} = 2$.

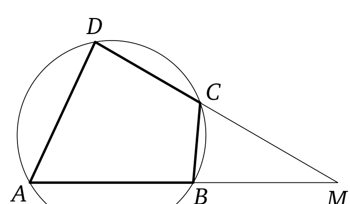
Поэтому указанные треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Пример 12. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.



Решение. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ выпуклый и $\angle BCA = \angle BDA$, около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Значит, $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AD.

Пример 13. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.



Решение. Можно считать, что точка C лежит между точками D и M (см. рисунок).

У треугольников MBC и MDA угол M общий. Кроме того,

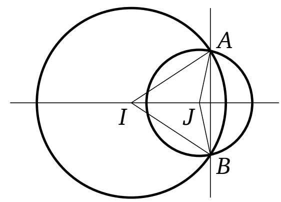
$$\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC$$

по свойству смежных углов, а $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$ по свойству вписанного четырёхугольника, поэтому $\angle ADM = \angle CBM$. Значит, треугольники MBC и MDA подобны по двум углам.

Окружности

Пример 14. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.

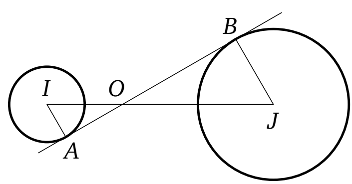
Решение. Точка I равноудалена от точек A и B, поэтому эта точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Аналогично точка J лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Значит, прямая, содержащая точки I и J, является серединным перпендикуляром к отрезку AB.



Следовательно, прямые IJ и AB перпендикулярны.

Пример 15. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:n$.

Решение. Пусть A и B — точки касания окружностей с общей касательной, O — точка пересечения прямых IJ и AB (см. рисунок). Тогда $\angle IAO = 90^\circ$ и $\angle JBO = 90^\circ$ как углы между касательной и радиусами, проведёнными в точки касания, $\angle AOI = \angle BOJ$ как вертикальные углы, поэтому прямоугольные треугольники AOI и BOJ подобны.



Следовательно, $\dfrac{IA}{JB} = \dfrac{IO}{JO} = \dfrac{m}{n}$, значит, радиусы окружностей с центрами в точках I и J относятся как $m:n$. Таким образом, и диаметры этих окружностей относятся как $m:n$.

Подготовительные задачи

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.

2. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна сумме площадей треугольников ABF и CDF.

4. Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P, лежащей на стороне AB. Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC, CD и AD.

5. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников ABK и CKD равна половине площади трапеции.

6. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

7. Около четырёхугольника $ABCD$ описана окружность. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке E. Докажите, что треугольники BEA и CED подобны.

8. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника равны.

9. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

10. Учитель изобразил на доске выпуклый многоугольник и попросил учеников оценить сумму его углов. Вика сказала, что сумма углов многоугольника больше 500°; Ника — что сумма углов многоугольника больше 600°; Лика — что сумма углов многоугольника больше 700°. Учитель ответил, что права только одна из них. Докажите, что многоугольник, изображённый учителем, является пятиугольником.

Зачётные задачи

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что углы C_1A_1B и CAB равны.

2. Биссектрисы углов C и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L — середина AB.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников ABF и CDF равна половине площади параллелограмма.

4. Биссектрисы углов A и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD и CD.

5. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна сумме площадей треугольников ABF и CFD.

6. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4,5 и 18, $BD=9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

7. Около четырёхугольника $ABCD$ описана окружность. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке E. Докажите, что треугольники BEC и AED подобны.

8. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

9. Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L, причём точки P и Q лежат по разные стороны от прямой KL. Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.

10. Учитель изобразил на доске выпуклый многоугольник и попросил учеников оценить сумму его углов. Ваня сказал, что сумма углов многоугольника меньше $600°$; Веня — что сумма углов многоугольника меньше $700°$; Женя — что сумма углов многоугольника меньше $800°$. Учитель ответил, что прав только один из них. Докажите, что многоугольник, изображённый учителем, является шестиугольником.

Задание 26

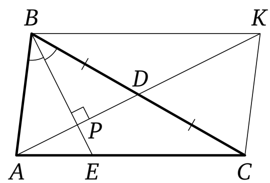
Краткие методические рекомендации

Последнее, 26-е задание ОГЭ по математике представляет собой планиметрическую задачу на вычисление, более сложную по сравнению с задачей 24. Последнюю можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для её решения, используются и при решении задания 26. Значительная часть задач связана с окружностью. Рассмотрим типичные примеры.

Треугольники

Пример 1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (см. рисунок).



Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 6; \quad BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2, \quad \text{откуда } AC = 3AE.$$

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC. Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD. Тогда

$$BK = AC = 3AE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

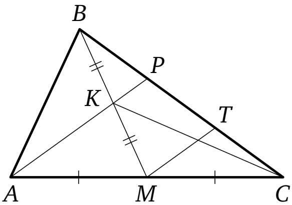
Поэтому $PE = 3$ и $BP = 9$. Следовательно,

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 3\sqrt{13}; \quad BC = 2AB = 6\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 3\sqrt{5}; \quad AC = 3AE = 9\sqrt{5}.$$

Ответ. $3\sqrt{13}$; $6\sqrt{13}$; $9\sqrt{5}$.

Пример 2. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.



Решение. Проведём $MT \parallel AP$. Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна $2S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $3S$ и равна площади треугольника CMK, которая в свою очередь равна площади треугольника AMK. Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK. Итак,

$$S_{BKP} = S, \quad S_{KPC} = 2S, \quad S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}, \quad S_{KPCM} = 5S.$$

Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3:5$.

Ответ. $3:5$.

Пример 3. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC.

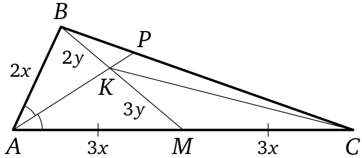
Решение. Пусть $AM = MC = 3x$. Тогда $AB = 2x$. Так как AK — биссектриса треугольника ABM, имеем $BK : KM = AB : AM = 2:3$, а так как AP — биссектриса треугольника ABC, имеем

$$BP : PC = AB : AC = 1 : 3.$$

Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и втрое большее основание, равна $3S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $4S$, а площадь треугольника CMK равна $6S$ и равна площади треугольника AMK. Тогда площадь треугольника ABK равна $4S$. Итак,

$$S_{BKP} = S, \quad S_{KPC} = 3S, \quad S_{CMK} = 6S = S_{AMK}, \quad S_{ABK} = 4S.$$

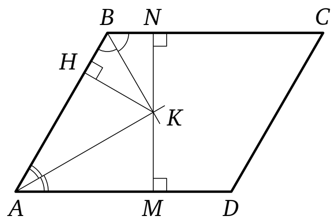
Значит, $S_{ABK} : S_{ABC} = (4S) : (20S) = 1:5$.



Ответ. $1:5$.

Четырёхугольники

Пример 4. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.



Решение. Пусть KH, KN и KM — перпендикуляры, опущенные из точки K к сторонам AB, BC и AD соответственно (см. рисунок). Тогда $KM = KH = KN = 7$.

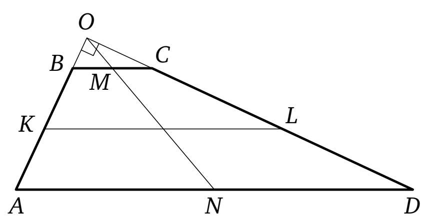
Кроме того, точки M, K и N лежат на одной прямой, и высота MN параллелограмма $ABCD$ равна $MK + KN = 14$. По формуле площади параллелограмма находим

$$S_{ABCD} = BC \cdot MN = 19 \cdot 14 = 266.$$

Ответ. 266.

Пример 5. Углы при одном из оснований трапеции равны 77° и 13°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна $77^\circ + 13^\circ = 90^\circ$, так что это большее основание AD.



Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рисунок). Легко видеть, что

$$\angle AOD = 180^\circ - (77^\circ + 13^\circ) = 90^\circ.$$

Пусть N — середина основания AD. Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямоугольного треугольника AOD. Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD, параллельный стороне AD, она пересекает основание BC также в его середине M.

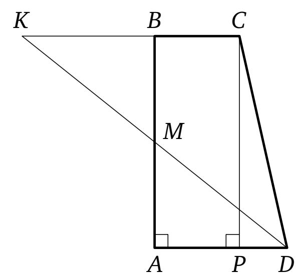
Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL трапеции при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем

$$AD = MN + KL = 11 + 10 = 21, \quad BC = KL - MN = 11 - 10 = 1.$$

Ответ. 21; 1.

Пример 6. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.



Решение. Пусть M — середина AB (см. рисунок). Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K. Поскольку

$$\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK,$$

треугольник KCD равнобедренный, $KC = CD = 41$, тогда

$$KB = KC - BC = 41 - 16 = 25.$$

Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что $AD = BK = 25$.

Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P, и тогда

$$PD = AD - AP = 25 - 16 = 9.$$

Треугольник CPD прямоугольный, так как

$$CD^2 = 41^2 = 40^2 + 9^2 = PC^2 + PD^2.$$

Поэтому CP — высота трапеции. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CP = 820.$$

Ответ. 820.

Окружности

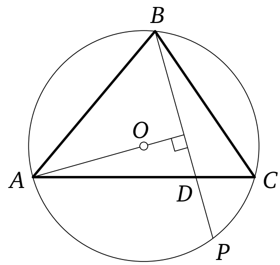
Пример 7. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Решение. Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке P (см. рисунок). Тогда хорда BP перпендикулярна радиусу OA этой окружности.

Значит, точка A — середина дуги BP, не содержащей вершину C. Отсюда следует, что

$$\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$$

(как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A общий).



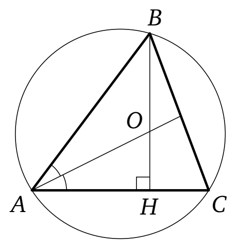
Следовательно, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$, откуда

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = 72; \quad CD = AC - AD = 98 - 72 = 26.$$

Ответ. 26.

Пример 8. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:3$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 8$.

Решение. Пусть BH — высота треугольника, которую биссектриса пересекает в точке O (см. рисунок).

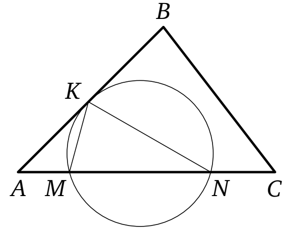


По теореме о биссектрисе в треугольнике ABH имеем $\dfrac{BA}{AH} = \dfrac{BO}{OH} = \dfrac{5}{3}$. Следовательно, $\cos A = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{3}{5}$. Тогда $\sin A = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$. По теореме синусов для треугольника ABC искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{8\cdot 5}{2\cdot 4} = 5$.

Ответ. 5.

Пример 9. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение. Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рисунок). По теореме о касательной и секущей



$$AK^2 = AM \cdot AN = 4\cdot 15 = 60.$$

По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM\cdot AK\cos\angle BAC =$$

$$= 16 + 60 - 2\cdot 4\cdot \sqrt{60}\cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16.$$

Значит, $KM = 4$.

Треугольник AKM равнобедренный, поэтому

$$\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC.$$

По теореме об угле между касательной и хордой

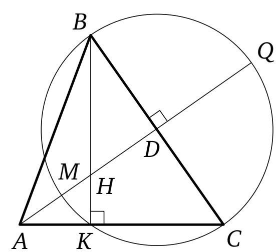
$$\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC.$$

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{15}{16}}} = 8.$$

Ответ. 8.

Пример 10. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.



Решение. Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рисунок). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC, а точка H лежит на отрезке BK.

Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 42$. По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 7 \cdot 91 = 637.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

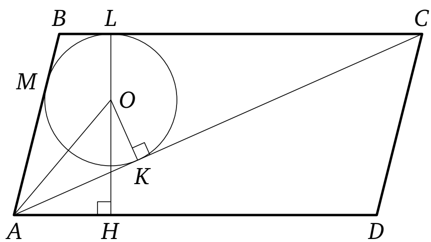
откуда $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 49AH$.

Значит, $49AH = 637$. Следовательно, $AH = 13$.

Ответ. 13.

Пример 11. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, L и K соответственно (см. рисунок), H — проекция точки O на прямую AD (точка H может лежать либо на стороне AD, либо на её продолжении). Тогда $OL = OK = 3$, точки O, L и H лежат на одной прямой, HL — высота параллелограмма $ABCD$, $HL = OL + OH = 3 + 4 = 7$. Из прямоугольного треугольника AOK находим, что $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = 4$.



Пусть p и S — полупериметр и площадь треугольника ABC, $r = 3$ — радиус окружности, вписанной в него. Обозначим $BC = x$. Тогда

$$p = AK + CL + BL = AK + BC = 4 + x,$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot HL = \frac{1}{2} x \cdot 7 = 3{,}5x, \quad S = p \cdot r = 3(4 + x).$$

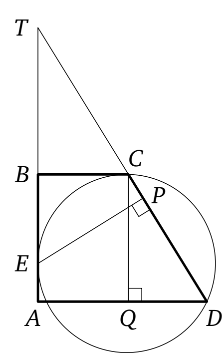
Из уравнения $3{,}5x = 3(4 + x)$ находим, что $BC = x = 24$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = 2S = 2pr = 168.$$

Ответ. 168.

Пример 12. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 14$, $BC = 12$.

Решение. Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD, P — проекция точки E на прямую CD, Q — проекция точки C на прямую AD (см. рисунок). Обозначим $CD = x$.



Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 2$, из подобия прямоугольных треугольников TBC и CQD находим, что $TC = 6x$. По теореме о касательной и секущей

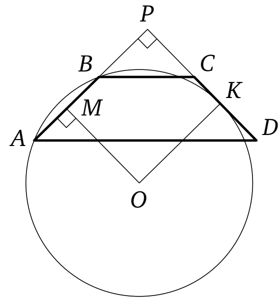
$$TE^2 = TD \cdot TC = 42x^2.$$

Из подобия прямоугольных треугольников TPE и TBC имеем

$$EP = \frac{BC \cdot TE}{TC} = \frac{12 \cdot x\sqrt{42}}{6x} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ. $2\sqrt{42}$.

Пример 13. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 20$.



Решение. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P (см. рисунок).

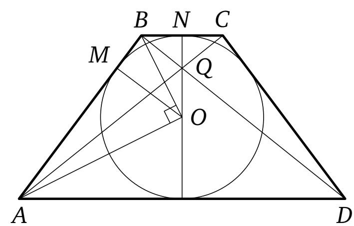
Из условия следует, что $\angle APD = 90°$. Из подобия треугольников APD и BPC получаем, что $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}$, то есть $\frac{BP}{BP+20} = \frac{21}{49}$, откуда $BP = 15$.

Пусть окружность касается прямой CD в точке K, а O — её центр. Опустим из точки O перпендикуляр OM на хорду AB. Точка M — середина AB. Так как $OMPK$ — прямоугольник, находим искомый радиус:

$$OK = MP = BP + \frac{1}{2}AB = 15 + 10 = 25.$$

Ответ. 25.

Пример 14. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.



Решение. Пусть BC — меньшее основание, AB — боковая сторона, AD — большее основание трапеции $ABCD$, M — точка касания окружности со стороной AB, N — со стороной BC, Q — точка пересечения диагоналей, O — центр окружности, r — её радиус (см. рисунок).

Поскольку трапеция описана около окружности, сумма её боковых сторон равна сумме оснований, то есть 60, поэтому

$$S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD+BC}{2} = 60r.$$

Значит, $r = 9$.

Прямые AD и BC параллельны. Значит, $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Поскольку лучи AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем $\angle ABO + \angle BAO = 90°$. Значит, треугольник AOB прямоугольный, а OM — его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому

$$AM \cdot MB = OM^2 = r^2; \quad AM(AB - AM) = r^2; \quad AM(30 - AM) = 81.$$

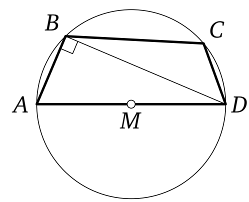
Учитывая, что $AM > BM$, из этого уравнения находим, что $AM = 27$. Тогда $AD = 54$, $BC = 6$. Треугольник AQD подобен треугольнику CQB с коэффициентом подобия 9, значит, высота QN треугольника BQC составляет $\frac{1}{10}$ высоты трапеции, то есть диаметра вписанной в неё окружности.

Следовательно, $QN = \frac{1}{10} \cdot 18 = 1{,}8$.

Ответ. 1,8.

Пример 15. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно $112°$ и $113°$.

Решение. Условие задачи означает, что четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром M, а AD — её диаметр (см. рисунок).



Так как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна $180°$, получаем, что $\angle DAB = 67°$ и $\angle ADC = 68°$.

Угол ABD прямой, так как он опирается на диаметр, поэтому $\angle ADB = 90° - 67° = 23°$, откуда $\angle CDB = 68° - 23° = 45°$.

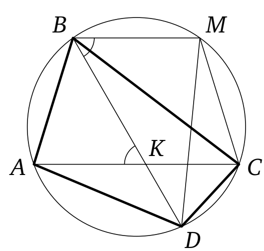
По теореме синусов для треугольника CDB получаем

$$AD = \frac{BC}{\sin 45°} = 10\sqrt{2}.$$

Ответ. $10\sqrt{2}$.

Пример 16. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Решение. Через точку B проведём хорду BM, параллельную диагонали AC (см. рисунок). Тогда



$$CM = AB = 25, \quad \angle DBM = \angle AKB = 60°.$$

Поскольку четырёхугольник $BMCD$ вписанный, получаем

$$\angle DCM = 180° - \angle DBM = 180° - 60° = 120°.$$

По теореме косинусов

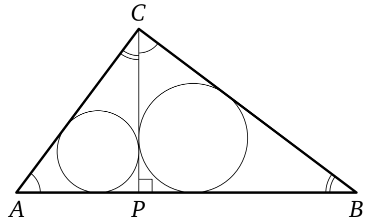
$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CD \cos \angle DCM} = \sqrt{1281}.$$

По теореме синусов радиус окружности равен

$$\frac{DM}{2 \sin \angle DBM} = \frac{\sqrt{1281}}{\sqrt{3}} = \sqrt{427}.$$

Ответ. $\sqrt{427}$.

Пример 17. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 8, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.



Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCP и ACP через r, r_1 и r_2 соответственно. Треугольники ABC, CBP и ACP подобны по двум углам. Поэтому отношение сходственных элементов любых двух из этих треугольников равно соответствующему коэффициенту подобия, т. е. отношению сходственных сторон. Значит,

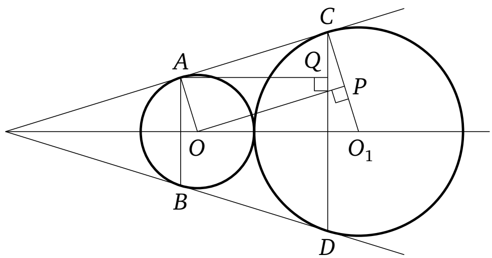
$$\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{4}{3}.$$

Возведя в квадрат и почленно сложив два первых равенства, получим $\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2} = 1$, откуда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Но $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$, следовательно, $r_2 = \frac{3}{4}r_1 = 6$. Тогда $r = \sqrt{r_1^2+r_2^2} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$.

Ответ. 10.

Пример 18. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение. Пусть O и O_1 — центры первой и второй окружностей соответственно (см. рисунок). Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 125.



Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 100 - 25 = 75.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что $OP^2=10000$, а так как четырёхугольник $AOPC$ — прямоугольник, $AC=OP=100$.

Опустим перпендикуляр AQ из точки A на прямую CD, тогда

$$\angle O_1OP = 90^\circ - \angle OO_1P = \angle O_1CD = 90^\circ - \angle ACQ = \angle CAQ.$$

Прямоугольные треугольники AQC и OPO_1 подобны по двум углам, поэтому $\frac{AQ}{AC}=\frac{OP}{OO_1}$. Следовательно, $AQ=\frac{OP\cdot AC}{OO_1}=\frac{OP^2}{OO_1}=80$.

Ответ. 80.

Подготовительные задачи

1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 16. Найдите стороны треугольника ABC.

2. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника AKM.

3. Углы при одном из оснований трапеции равны 47° и 43°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 16 и 14. Найдите основания трапеции.

4. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если из четырёх следующих утверждений о нём три истинны, а одно ложно:

1) $ABCD$ — квадрат;

2) $ABCD$ — трапеция с тремя равными сторонами;

3) периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 52;

4) сумма длин трёх сторон четырёхугольника $ABCD$ на 8 больше длины его четвёртой стороны.

5. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:3$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC=16$.

6. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD=9$, $MD=6$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD=8$, $BC=4$.

8. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 1500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

9. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=5$ и $CD=17$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB=60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

10. Окружности радиусов 45 и 55 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Зачётные задачи

1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 44. Найдите стороны треугольника ABC.

2. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади четырёхугольника $KPCM$ к площади треугольника ABC.

3. Углы при одном из оснований трапеции равны 39° и 51°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 3. Найдите основания трапеции.

4. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если из четырёх следующих утверждений о нём три истинны, а одно ложно:

1) $ABCD$ — квадрат;
2) $ABCD$ — трапеция с тремя равными сторонами;
3) периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 56;
4) сумма длин трёх сторон четырёхугольника $ABCD$ на 28 больше длины его четвёртой стороны.

5. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 18$.

6. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 14$, $BC = 7$.

8. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 80, а площадь равна 320, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

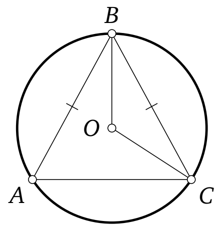
9. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 39$ и $CD = 12$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

10. Окружности радиусов 42 и 84 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

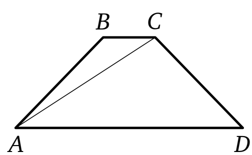
Диагностическая работа 1

1. В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 8 и 17 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

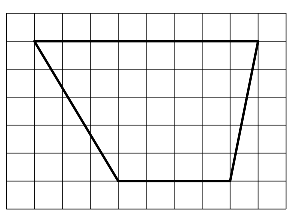
2. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB=BC$ и $\angle ABC=57^\circ$. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



3. Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 33° и 13° соответственно. Ответ дайте в градусах.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.
2) В параллелограмме есть два равных угла.
3) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению длин его катетов.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

6. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF=12$, $BF=9$.

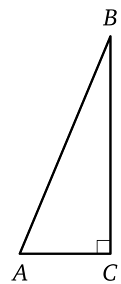
7. Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна сумме площадей треугольников BCK и ADK.

8. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 21 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

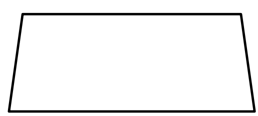
Диагностическая работа 2

1. Два катета прямоугольного треугольника равны 6 и 7. Найдите площадь этого треугольника.

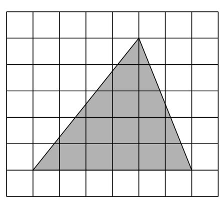
2. В треугольнике ABC известно, что $AC=10$, $BC=24$, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



3. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 196°. Найдите меньший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



5. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если в параллелограмме две соседние стороны равны, то этот параллелограмм является ромбом.
2) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.
3) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению длин его катетов.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

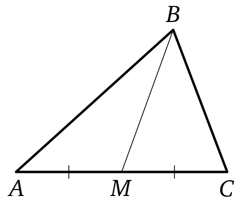
6. Найдите боковую AB сторону трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135°, а $CD = 24$.

7. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что углы ABC и CDK равны.

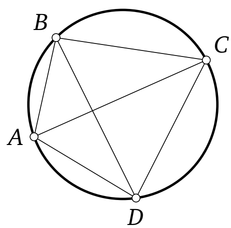
8. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 13, 7 и 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Диагностическая работа 3

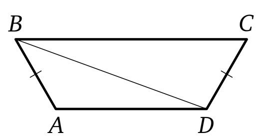
1. В треугольнике ABC известно, что $AC = 14$, BM — медиана, $BM = 10$. Найдите AM.



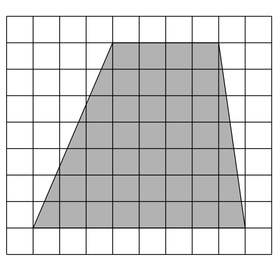
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 39°, угол CAD равен 55°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



3. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BDA = 14^\circ$ и $\angle BDC = 106^\circ$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.
2) Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.
3) Площадь любого параллелограмма равна произведению длин его сторон.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

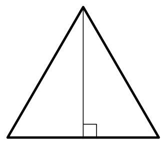
6. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 30$, $CD = 40$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

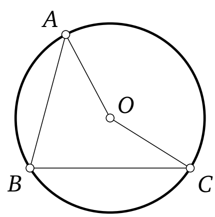
8. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 18 и 6, а сумма углов при основании AD равна $90°$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 10$.

Диагностическая работа 4

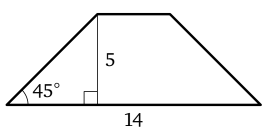
1. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.



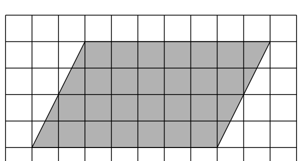
2. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что $\angle ABC = 75°$ и $\angle OAB = 43°$. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.



3. В равнобедренной трапеции известны высота, большее основание и угол при основании (см. рисунок). Найдите меньшее основание.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его высотой.
2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является ромбом.
3) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

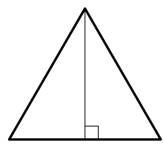
6. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Диаметр этой окружности равен 3. Найдите диаметр описанной окружности треугольника ABC.

7. Диагональ BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой каждого из углов ABC и ADC. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

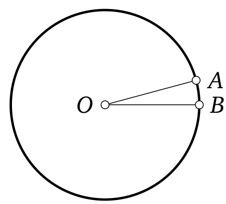
8. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 12$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 115° и 95°.

Диагностическая работа 5

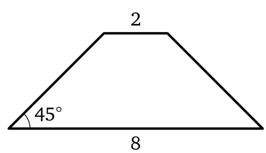
1. Высота равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



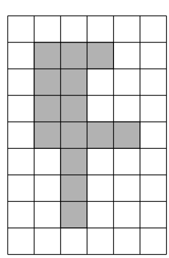
2. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 15°$. Длина большей дуги AB равна 1104. Найдите длину меньшей дуги AB.



3. В равнобедренной трапеции основания равны 2 и 8, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Если угол острый, то смежный с ним угол также является острым.
2) Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.
3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна сумме катетов.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

6. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 3$, $AC = 5$.

7. Сторона квадрата равна целому числу сантиметров. Докажите, что площадь квадрата равна 100 кв. см, если из двух следующих утверждений истинно ровно одно:

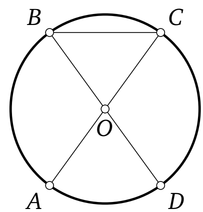
1) периметр квадрата меньше 38 см;
2) периметр квадрата меньше 44 см.

8. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 4, тангенс угла BAC равен 0,75. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Диагностическая работа 6

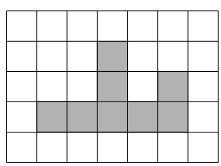
1. В треугольнике два угла равны 43° и 88°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

2. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 54°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



3. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 5, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.



5. Какие из следующих утверждений верны?

1) Все диаметры окружности равны между собой.
2) Угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.
3) Любые два равносторонних треугольника подобны.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 24 и 51. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

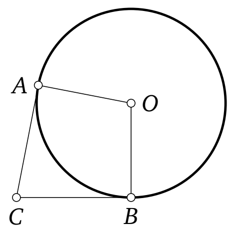
7. Сумма углов при большем основании трапеции равна 90°. Докажите, что длина отрезка с концами в серединах ее оснований равна полуразности оснований.

8. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 20. Найдите стороны треугольника ABC.

Диагностическая работа 7

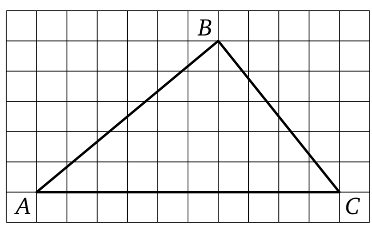
1. Сторона треугольника равна 18, а высота, проведённая к этой стороне, равна 17. Найдите площадь этого треугольника.

2. В угол C величиной 79° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, точка O — центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



3. Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 12° и 13° соответственно. Ответ дайте в градусах.

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC.



5. Какие из следующих утверждений верны?

1) Смежные углы всегда равны.
2) Площадь квадрата равна произведению двух его смежных сторон.
3) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 13$, $AC = 65$, $NC = 28$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.

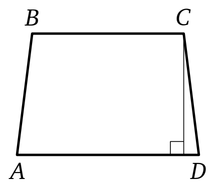
8. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $17:15$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC=16$.

Диагностическая работа 8

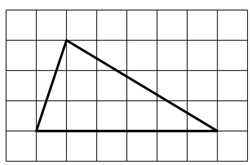
1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 102^\circ$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.

2. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 17. Найдите AC, если $BC = 30$.

3. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины C, делит основание AD на отрезки длиной 1 и 11. Найдите длину основания BC.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Все квадраты имеют равные площади.
2) Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.
3) В остроугольном треугольнике все углы острые.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

6. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 45$, $BC = 27$, $CF : DF = 5 : 4$.

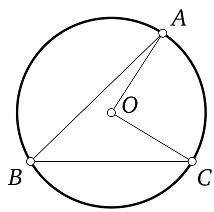
7. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке N, лежащей на стороне CD. Докажите, что N — середина CD.

8. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 32 и 24, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 7$.

Диагностическая работа 9

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу этого треугольника.

2. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что $\angle ABC = 44^\circ$ и $\angle OAB = 13^\circ$. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.

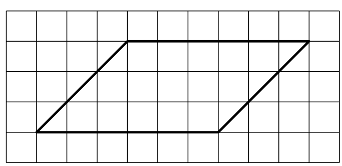


3. В трапеции $ABCD$ известно, что

$$AB = CD, \quad \angle BDA = 35^\circ \quad \text{и} \quad \angle BDC = 58^\circ.$$

Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



5. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.
2) Если в параллелограмме две соседние стороны равны, то этот параллелограмм является ромбом.
3) В любой четырёхугольник можно вписать окружность.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 8$, $CK = 13$.

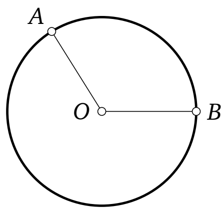
7. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.

8. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 12$, $AC = 72$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Диагностическая работа 10

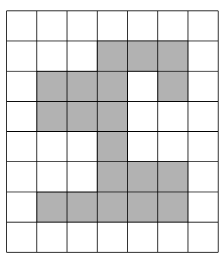
1. Сторона равностороннего треугольника равна $20\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.

2. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 122^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 61. Найдите длину большей дуги AB.



3. Сторона ромба равна 12, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до неё равно 2. Найдите площадь этого ромба.

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Тангенс любого острого угла меньше единицы.
2) Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности.
3) Площадь квадрата равна произведению его диагоналей.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

6. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна стороне CD, а диагональ BD перпендикулярна стороне AB. Докажите, что сумма углов A и C этого четырёхугольника равна 180°.

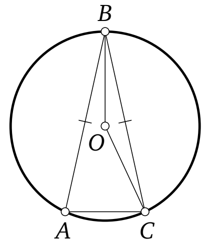
8. Найдите площадь треугольника ABC, если из пяти следующих утверждений четыре истинны, а одно ложно:

1) треугольник ABC прямоугольный;
2) треугольник ABC равнобедренный;
3) любой из углов треугольника ABC больше $45°$;
4) периметр треугольника ABC равен 32;
5) длина одной из сторон треугольника ABC равна 12.

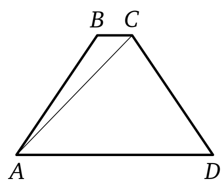
Диагностическая работа 11

1. В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 30 и 50 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

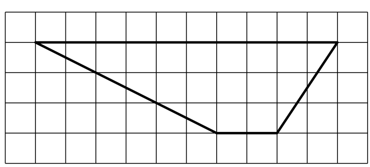
2. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 25°$. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



3. Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 46° и 1° соответственно. Ответ дайте в градусах.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Диагонали ромба равны.
2) Отношение площадей подобных треугольников равно коэффициенту подобия.
3) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

6. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 21$, $BF = 20$.

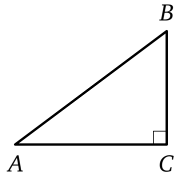
7. Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что сумма площадей треугольников BCK и ADK равна половине площади трапеции.

8. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 8 и 30 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

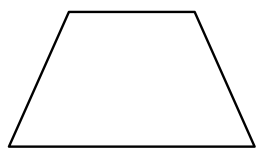
Диагностическая работа 12

1. Два катета прямоугольного треугольника равны 9 и 6. Найдите площадь этого треугольника.

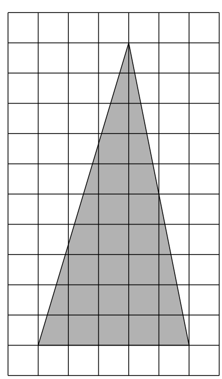
2. В треугольнике ABC известно, что $AC = 40$, $BC = 30$, угол C равен $90°$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



3. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна $218°$. Найдите меньший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



5. Какие из следующих утверждений верны?

1) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.
2) Все квадраты имеют равные площади.
3) Один из углов треугольника всегда не превышает 60 градусов.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

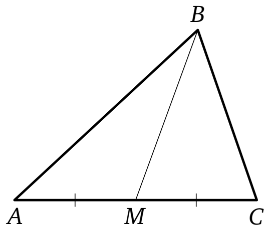
6. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135°, а $CD = 60$.

7. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что углы BAD и KCD равны.

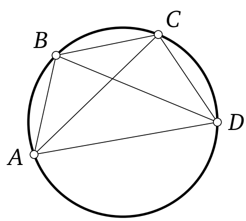
8. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 13, 6 и 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Диагностическая работа 13

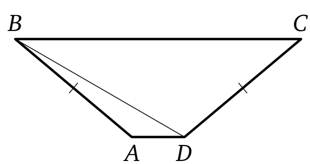
1. В треугольнике ABC известно, что $AC = 16$, BM — медиана, $BM = 12$. Найдите AM.



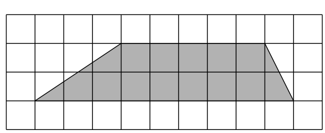
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 80°, угол CAD равен 34°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



3. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BDA = 30^\circ$ и $\angle BDC = 110^\circ$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Боковые стороны любой трапеции равны.
2) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника.
3) Если две стороны и угол одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

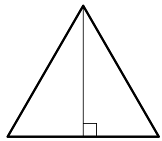
6. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 16$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 15 и 8.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

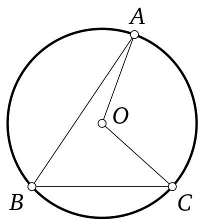
8. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 33 и 11, а сумма углов при основании AD равна $90°$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 20$.

Диагностическая работа 14

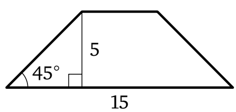
1. Сторона равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.



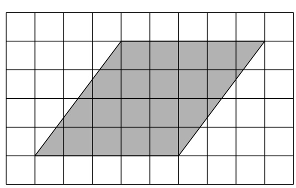
2. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что $\angle ABC = 56^\circ$ и $\angle OAB = 15^\circ$. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.



3. В равнобедренной трапеции известны высота, большее основание и угол при основании (см. рисунок). Найдите меньшее основание.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?
1) Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.
2) Если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3) Отношение площадей подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

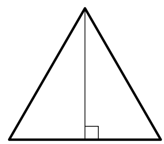
6. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Найдите этот диаметр, если диаметр описанной окружности треугольника ABC равен 8.

7. Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой каждого из углов BAD и BCD. Докажите, что одна из точек этой диагонали равноудалена от всех сторон четырёхугольника.

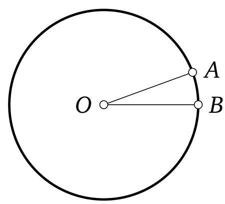
8. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC=9$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 116° и 94°.

Диагностическая работа 15

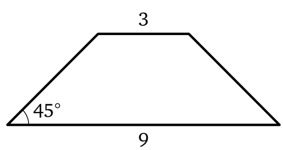
1. Высота равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



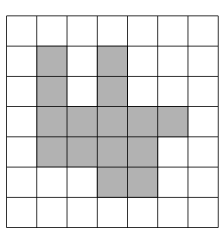
2. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 20^\circ$. Длина большей дуги AB равна 1496. Найдите длину меньшей дуги AB.



3. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 9, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.



5. Какое из следующих утверждений верно?

1) Все углы ромба равны.
2) Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны.
3) Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

6. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 1$, $AC = 5$.

7. Сторона квадрата равна целому числу сантиметров. Докажите, что площадь квадрата равна 100 кв. см, если из двух следующих утверждений истинно ровно одно:

1) периметр квадрата больше 37 см;
2) периметр квадрата больше 43 см.

8. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 12, тангенс угла ABC равен 2,4. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответы

Задание 9

Подготовительные задачи. **1.** 74. **2.** 47. **3.** 38. **4.** 31. **5.** 26. **6.** 16. **7.** 174. **8.** 14. **9.** 24. **10.** 30.
Зачётные задачи. **1.** 71. **2.** 72. **3.** 26. **4.** 34. **5.** 20. **6.** 30. **7.** 217. **8.** 17. **9.** 15. **10.** 22.

Задание 10

Подготовительные задачи. **1.** 10. **2.** 54. **3.** 22. **4.** 97. **5.** 36. **6.** 55. **7.** 14,5. **8.** 21. **9.** 441. **10.** 64.
Зачётные задачи. **1.** 40. **2.** 47. **3.** 148. **4.** 140. **5.** 26. **6.** 73. **7.** 12,5. **8.** 53. **9.** 154. **10.** 196.

Задание 11

Подготовительные задачи. **1.** 35. **2.** 40. **3.** 86. **4.** 12. **5.** 18. **6.** 155. **7.** 72. **8.** 8. **9.** 16. **10.** 5,5.
Зачётные задачи. **1.** 110. **2.** 75. **3.** 78. **4.** 42. **5.** 40,5. **6.** 129. **7.** 76. **8.** 7. **9.** 17. **10.** 9,5.

Задание 12

Подготовительные задачи. **1.** 7. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 4. **6.** 5. **7.** 36. **8.** 18. **9.** 10. **10.** 13.
Зачётные задачи. **1.** 12. **2.** 6. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 8. **6.** 5. **7.** 31,5. **8.** 28. **9.** 36. **10.** 16.

Задание 13

Подготовительные задачи. **1.** 13. **2.** 1. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 13. **6.** 13. **7.** 2. **8.** 13. **9.** 23. **10.** 3.
Зачётные задачи. **1.** 23. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 1. **5.** 23. **6.** 23. **7.** 1. **8.** 2. **9.** 13. **10.** 3.

Задание 24

Подготовительные задачи. **1.** 27. **2.** 28. **3.** 10. **4.** 62. **5.** 15. **6.** 33. **7.** 3. **8.** 10. **9.** 13. **10.** 7.
Зачётные задачи. **1.** 35. **2.** 10. **3.** 14. **4.** 48. **5.** 9. **6.** 21. **7.** $12\sqrt{3}$. **8.** 9. **9.** 15. **10.** 15.

Задание 26

Подготовительные задачи. **1.** $4\sqrt{13}$; $8\sqrt{13}$; $12\sqrt{5}$. **2.** $1:6$. **3.** 30; 2. **4.** 128. **5.** 10. **6.** 5. **7.** $4\sqrt{2}$. **8.** 3. **9.** $\sqrt{133}$. **10.** 99.
Зачётные задачи. **1.** $11\sqrt{13}$; $22\sqrt{13}$; $33\sqrt{5}$. **2.** $9:20$. **3.** 22; 16. **4.** 196. **5.** 15. **6.** 8. **7.** $7\sqrt{2}$. **8.** 3,2. **9.** $3\sqrt{79}$. **10.** 112.

Диагностическая работа 1

1. 15. **2.** 123. **3.** 134. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 15. **8.** 8.

Диагностическая работа 2

1. 21. **2.** 13. **3.** 82. **4.** 15. **5.** 12. **6.** $8\sqrt{6}$. **8.** 720.

Диагностическая работа 3

1. 7. **2.** 94. **3.** 46. **4.** 42. **5.** 1. **6.** 15. **8.** 10.

Диагностическая работа 4

1. 21. **2.** 32. **3.** 4. **4.** 28. **5.** 3. **6.** 6. **8.** $8\sqrt{3}$.

Диагностическая работа 5

1. 26. **2.** 48. **3.** 15. **4.** 14. **5.** 2. **6.** 3,2. **8.** 5.

Диагностическая работа 6

1. 49. **2.** 72. **3.** 4. **4.** 8. **5.** 13. **6.** $\frac{360}{17}$. **8.** $5\sqrt{13}$; $10\sqrt{13}$; $15\sqrt{5}$.

Диагностическая работа 7

1. 153. **2.** 101. **3.** 155. **4.** 5. **5.** 23. **6.** 7. **8.** 17.

Диагностическая работа 8

1. 39. **2.** 16. **3.** 10. **4.** 9. **5.** 3. **6.** 37. **8.** 24,5.

Диагностическая работа 9

1. 25. **2.** 31. **3.** 52. **4.** 18. **5.** 12. **6.** 58. **8.** 70.

Диагностическая работа 10

1. 30. **2.** 119. **3.** 48. **4.** 19. **5.** 2. **6.** 7. **8.** 48.

Диагностическая работа 11

1. 40. **2.** 155. **3.** 133. **4.** 6. **5.** 3. **6.** 29. **7.** 16.

Диагностическая работа 12

1. 27. **2.** 25. **3.** 71. **4.** 25. **5.** 13. **6.** $20\sqrt{6}$. **8.** 23.

Диагностическая работа 13

1. 8. **2.** 114. **3.** 10. **4.** 14. **5.** 2. **6.** 30. **8.** 20.

Диагностическая работа 14

1. 18. **2.** 41. **3.** 5. **4.** 20. **5.** 1. **6.** 4. **8.** $6\sqrt{3}$.

Диагностическая работа 15

1. 24. **2.** 88. **3.** 18. **4.** 15. **5.** 3. **6.** 4,8. **8.** 13.

Содержание

Учебно-методическое пособие

Иван Валериевич Ященко
Сергей Алексеевич Шестаков

ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия

Подписано в печать 30.06.2017 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 7,5. Тираж 5000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru