I. РЕШИТЕ ПРЕДЛОЖЕННЫЕ ЗАДАНИЯ.

1. Найдите все натуральные числа n со свойством: число n увеличивается на 518221, если к нему приписать слева и справа цифру 5.
2. Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы никакие 4 точки не лежали на одной прямой, и было хотя бы 10 троек точек, лежащих на одной прямой?
3. Катя увлекается вязанием из ленточек. Для того чтобы закончить изделие, ей необходимо разрезать полотно длиной 2024 см на сантиметровые полоски. Какое минимальное количество разрезов ей надо будет сделать? *Разрезы выполняются по всей ширине полотна на 2024 части.*
4. Сравните числа $\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2025^3}\right)$ и $\sqrt{\frac{3}{2}}$.
5. Дана последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, … , 2023, 2024. Катя хочет разделить эти числа на две группы так, чтобы сумма чисел одной группы и произведение чисел второй группы были бы равны. Удастся ли ей это сделать?
6. На сторонах параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ выбраны точки A, B, C, D - так, что $ABCD$ - квадрат (все точки лежат на разных сторонах параллелограмма). Из каждой вершины параллелограмма на ближайшую сторону квадрата провели перпендикуляр. Докажите, что основания перпендикуляров образуют квадрат.
7. Докажите, что для любого натурального n верно неравенство
$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}<1.$$

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так и в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство). В случае некорректного условия прокомментируйте предложенное решение.

8. Решите неравенство $\frac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}-1>0$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4};1\right]$.

Решение. Неравенство выполняется в том случае, если числитель больше знаменателя. Синус больше косинуса на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$ и $\left(-\pi+2\pi k;-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. Рассматриваем только I и III четверти, так как дробь должна принимать положительные значения. Учитывая то, что cos$x$ и sin$x$ являются одновременно и аргументами, значение которых не может выходить за промежуток [-1; 1], получаем $\left(\frac{\pi}{4};1\right]$.

9. Решите уравнение $x^2-12[x]+20=0$, где $[x]$ - наибольшее целое, не превосходящее x.

Ответ: 2; 10

Решение: Так как $[x]$ это целое число, то решая квадратное уравнение, мы получим корни 2 и 10.

10. Докажите, что найдётся число в записи которого встречаются одна цифра 1, две цифры 2, три цифры 3, четыре цифры 4, пять цифр 5, шесть цифр 6, семь цифр 7, восемь цифр 8, девять цифр 9 и какое-то количество нулей, являющееся полным квадратом.

Доказательство. Поскольку нам дано любое количество нулей, то мы можем некотором образом упорядочивая имеющиеся цифры, при необходимости добавлять необходимое количество нулей, чтобы получить полный квадрат.

II. РЕШЕНИЯ

1. Найдите все натуральные числа n со свойством: число n увеличивается на 518221, если к нему приписать слева и справа цифру 5.

Ответ: 2024

Решение. Заметим, что если число увеличивается на 518221, если к нему приписать слева и справа цифру 5, то оно не может иметь более 5-ти знаков, т.к. новое число будет иметь на два знака больше данного. Учитывая то, что увеличенное число заканчивается на 5, восстановим данное число, заменяя звёздочки соответствующими цифрами:

$$\begin{array}{r} \ast\ast\ast\ast\ast \\ +\ 518221 \\ \hline 5\ast\ast\ast\ast5 \end{array}.$$

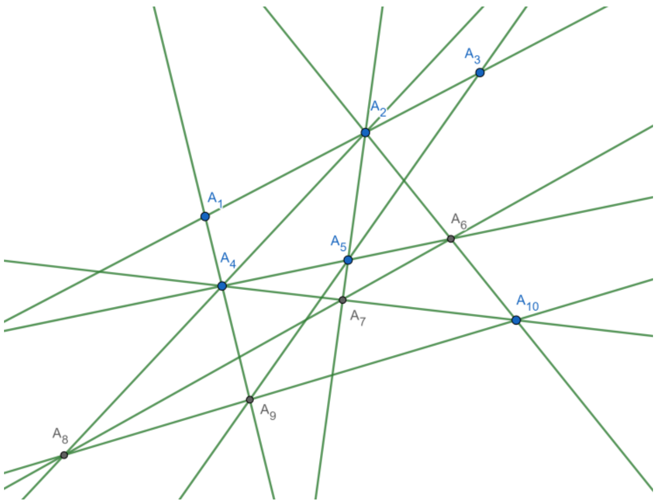
Отметим, что цифры определяются однозначно, без вариативности

$$\begin{array}{r} 2024 \\ +518221 \\ \hline 520245 \end{array}.$$

2. Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы никакие 4 точки не лежали на одной прямой, и было хотя бы 10 троек точек, лежащих на одной прямой?

Ответ: да

Решение: Пример расположения. Перечислим тройки точек, принадлежащих одной прямой:



1) $A_1A_2A_3$,
2) $A_1A_4A_9$,
3) $A_2A_4A_8$,
4) $A_2A_5A_7$,
5) $A_2A_6A_{10}$,
6) $A_3A_5A_9$,
7) $A_4A_5A_6$,
8) $A_4A_7A_{10}$,
9) $A_6A_7A_8$,
10) $A_8A_9A_{10}$.

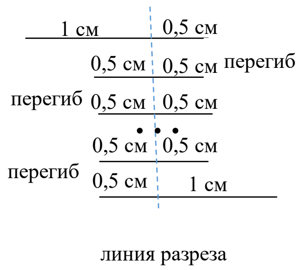
3. Катя увлекается вязанием из ленточек. Для того чтобы закончить изделие, ей необходимо разрезать полотно длиной 2024 см на сантиметровые полосочки. Какое минимальное

количество разрезов ей надо будет сделать? *Разрезы выполняются по всей ширине полотна на 2024 части.*

Ответ: 1 разрез

Решение: Полотно складываем гармошкой и выполняем один разрез:

1,5 см перегиб – 1см перегиб – 1 см перегиб - … - 1 см перегиб - 1,5 см. Разрез выполняем на расстоянии 0,5 см от первого перегиба так, чтобы вся средняя часть разрезалась на полоски по 1 см.



4. Сравните числа $\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2025^3}\right)$ и $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответ: первое меньше.

Решение: Обозначим первое число через A, а второе через B и докажем, что $A < B$.

Первый способ. Заметим, что

$$\left(1+\frac{2}{2^3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{4^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2024^3}\right)>\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2025^3}\right),$$

следовательно,

$$A^2<\left(1+\frac{2}{2^3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2024^3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{2025^3}\right)<$$

$$<\left(1+\frac{2}{2^3-1}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3^3-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2024^3-1}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{2025^3-1}\right)=$$

$$=\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2025^3+1}{2025^3-1}=$$

$$=\frac{(2+1)(2^2-2+1)}{(2-1)(2^2+2+1)}\cdot\frac{(3+1)(3^2-3+1)}{(3-1)(3^2+3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(2025+1)(2025^2-2025+1)}{(2025-1)(2025^2+2025+1)}.$$

Заметим, что $n^2-n+1=(n-1)^2+(n-1)+1$. Последнее преобразуется к виду

$$=\frac{3\cdot4\cdot\ldots\cdot2026\cdot(1^2+1+1)\cdot(2^2+2+1)\cdot\ldots\cdot(2024^2+2024+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot2024\cdot(2^2+2+1)\cdot(3^2+3+1)\cdot\ldots\cdot(2025^2+2025+1)}=\frac{2025\cdot2026\cdot(1^2+1+1)}{1\cdot2\cdot(2025^2+2025+1)}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2025\cdot2026}{(2025^2+2025+1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2026}{\left(2026+\frac{1}{2025}\right)}<\frac{3}{2}=B^2.$$

Следовательно, $A < B$.

Второй способ. Из известного неравенства $\ln(1+x) < x,\ x \neq 0, x > -1$, следует, что

$$\ln A < \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} + \ldots + \frac{2}{2025^3} < \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{2}{2024\cdot 2025\cdot 2026} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2024} - \frac{2}{2025} + \frac{1}{2026}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2025} + \frac{1}{2026} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2025\cdot 2026} < \frac{1}{6}.$$

С другой стороны, $B^6 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 > 3 > \exp$, поэтому $\ln B > \frac{1}{6}$.

5. Дана последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, … , 2023, 2024. Катя хочет разделить эти числа на две группы так, чтобы сумма чисел одной группы и произведение чисел второй группы были бы равны. Удастся ли ей это сделать?

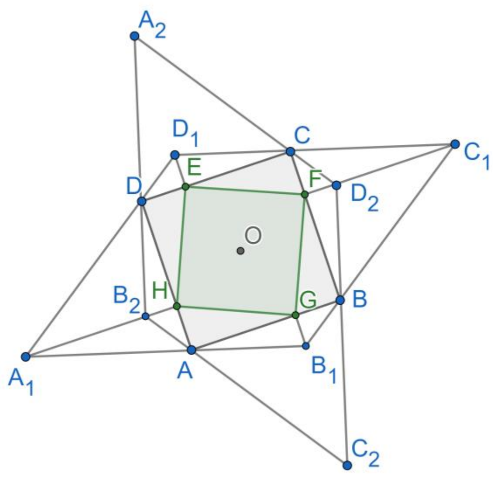
Ответ: да

Решение: Если число имеет вид $4n$, то сумма всех чисел от 1 до $4n$ равна $1 + 2 + \ldots + 4n = \frac{(1+4n)\cdot 4n}{2} = 2n\cdot(1+4n)$.

Заметим, что верна формула: $(a-1)\cdot(b-1) = ab - (a-1) - (b-1) - 1$. Отсюда понятно, что в нашем случае нужно убрать 3 числа: 1, $2n$ - 1 = 1011 и $4n$ = 2024, тогда оставшаяся сумма будет равна произведению убранных чисел, согласно формуле выше, т.е.

$$1\cdot(2n-1)\cdot 4n = 8n^2 - 4n = 8n^2 + 2n - (1 + 2n - 1 + 4n) = 2n\cdot(4n+1) - (1 + 2n - 1 + 4n).$$

6. На сторонах параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ выбраны точки A, B, C, D - так, что $ABCD$ - квадрат (все точки лежат на разных сторонах параллелограмма). Из каждой вершины параллелограмма на ближайшую сторону квадрата провели перпендикуляр. Докажите, что основания перпендикуляров образуют квадрат.



Доказательство. Опустим из вершин параллелограмма A_1, B_1, C_1 и D_1 перпендикуляры A_1H, B_1G, C_1F и D_1E к сторонам квадрата AD, AB, BC и DC. Чтобы доказать, что $EFGH$ квадрат, достаточно проверить, что при повороте на 90^o относительно общего центра O квадрата $ABCD$ и параллелограмма

$A_1B_1C_1D_1$ указанные перпендикуляры переходят друг в друга.

Пусть $A_2B_2C_2D_2$ образ $A_1B_1C_1D_1$ при повороте на 90° относительно центра O (A_1 переходит в A_2, B_1 переходит в B_2, C_1 переходит в C_2, D_1 переходит в D_2). Стороны параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны сторонам параллелограмма $A_2B_2C_2D_2$, значит, $A_1D_1 \perp A_2C$, $C_1D_1 \perp A_2B_2$, D_1 - точка пересечения высот треугольника DA_2C, и, следовательно, при указанном повороте A_1H переходит в A_2E. Что и требовалось доказать.

7. Докажите, что для любого натурального n верно неравенство

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}<1.$$

Доказательство. Найдём компактное выражение для суммы $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

$$S_1=\frac{3}{4}$$

$$S_2=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}=\frac{8}{9}$$

$$S_3=\frac{8}{9}+\frac{7}{144}=\frac{15}{16}$$

и т.д. Отсюда предполагаем, что $S_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$.

Докажем это равенство с помощью метода математической индукции.

База индукции выполняется.

Докажем индукционный шаг: если $S_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$, то $S_{n+1}=\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}$.

Действительно,

$$S_{n+1}=S_n+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}.$$

Неравенство $\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}<1$ верно, поскольку числитель меньше знаменателя.

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так и в ответах и решениях). Найдите ошибки и приведите верное решение (доказательство). В случае некорректного условия прокомментируйте предложенное решение.

8. Решите неравенство $\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}-1>0$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4};1\right]$.

Решение. Неравенство выполняется в том случае, если числитель больше знаменателя. Синус больше косинуса на промежутках $\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$ и $\left(-\pi+2\pi k;-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. Рассматриваем только I и III четверти, так как дробь должна принимать положительные значения. Учитывая то, что $\cos x$ и $\sin x$ являются одновременно и аргументами, значение которых не может выходить за промежуток [-1; 1], получаем $\left(\dfrac{\pi}{4};1\right]$.

Ошибки, допущенные в решении: Перечисленные факты не рассмотрены в рамках поставленной задачи, т.е. нет логической связи с условием, поэтому решение неверно.

Верное решение: Приведём к общему знаменателю и рассмотрим разность

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\sin(\cos x)=$$

$$=2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2},$$

$$0<\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}\le\frac{\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\alpha}{2}\le\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}<\pi.$$

Таким образом, угол $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$ положителен и лежит в первой четверти. Значит, полученное произведение косинуса на синус положительно и разность тоже положительна. Следовательно, $\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}<1$, и исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет

9. Решите уравнение $x^2-12[x]+20=0$, где $[x]$ - наибольшее целое, не превосходящее x.

Ответ: 2; 10

Решение: Так как $[x]$ это целое число, то решая квадратное уравнение, мы получим корни 2 и 10.

Ошибки, допущенные в решении: Рассмотрен частный случай, нет полного решения.

Верное решение: Пусть $[x] = a$. Тогда $a \le x < a+1$. Следовательно, $a^2+20 \le x^2 + 20 < (a + 1)^2 + 20$. Поэтому $a^2 + 20 \le 12\cdot a < a^2 + 2a + 21$. Получим систему:

$$\begin{cases} a^2 - 12a + 20 \le 0, \\ a^2 - 10a + 21 > 0. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} (a-10)\cdot(a-2) \le 0, \\ (a-3)\cdot(a-7) > 0. \end{cases}$$

Имеем следующие возможные значения для a {2; 8; 9; 10}.

Поскольку $x^2 + 20 = 12\cdot a$, для каждого a находим значения x и выбираем положительные, т.к. отрицательные не могут быть решениями:

$a = 2$: $x^2 + 20 = 24 \Rightarrow x = 2$;

$a = 8$: $x^2 + 20 = 96 \Rightarrow x = 2\sqrt{19}$;

$a = 9$: $x^2 + 20 = 108 \Rightarrow x = 2\sqrt{22}$;

$a = 10$: $x^2 + 20 = 120 \Rightarrow x = 10$.

Ответ: 2; $2\sqrt{19}$; $2\sqrt{22}$; 10.

10. Докажите, что найдётся число в записи которого встречаются одна цифра 1, две цифры 2, три цифры 3, четыре цифры 4, пять цифр 5, шесть цифр 6, семь цифр 7, восемь цифр 8, девять цифр 9 и какое-то количество нулей, являющееся полным квадратом.

Доказательство. Поскольку нам дано любое количество нулей, то мы можем некотором образом упорядочивая имеющиеся цифры, при необходимости добавлять необходимое количество нулей, чтобы получить полный квадрат.

Верное решение.

Формулировка утверждения некорректна, и, следовательно, доказательство не может быть верным.

Сумма цифр предложенного числа равна 1+4+9+16+25+36+49+64+81=285. Число делится на 3, но не делится на 9. Значит оно не может быть полным квадратом.