ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ И ИХ МЕСТО В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Бурлуцкая Л.И.
Учитель математики,
МКОУ СОШ № 11 с. Белые Копани
Апанасенковского района
Ставропольского края

Геометрические задачи на построение, возможно, самые древние математические задачи. Без задач на построение геометрия перестала бы быть геометрией. Геометрические построения являются весьма существенным элементом изучения геометрии. Однако, анализ содержания школьного математического образования позволил выявить ряд недостатков в обучении школьников [24].

Наметилась четкая тенденция к сокращению количества задач на построение в школьном курсе математики средней школы. Это объясняется тем, что значительно сужена роль задач на построение, которая соответствует целям обучения, таким как развитие мышления и воспитание учащихся, и проявляется в виде воздействия на мышление учеников, в первую очередь на логическое. В большинстве случаев основное внимание уделяется практическому значению задач, при этом совершенно не рассматривается вопрос развития логического мышления учеников и возможности использования задач на построение при изучении геометрии.

Знания учащихся по данной теме нередко носят формальный характер, наблюдается отсутствие структурности.

В настоящий момент в школе недостаточно уделяется внимания рассмотрению таких основных методов решения задач на построение как метод преобразований, алгебраический метод, метод геометрического места точек.

У учащихся нет четкого представления об этапах решения задач на построение: анализе, построении, доказательстве и исследовании, которые точно соответствуют этапам любого логического рассуждения. Практически не уделяется внимание одному из важных этапов – исследованию, в котором учащиеся зачастую не видят смысла, несмотря на то, что он, в свою очередь, является хорошим средством развития логического мышления [26].

Тема исследования «Задачи на построение и их место в курсе средней школы» важна и актуальна. Задачи на построение развивают поисковые навыки решения практических проблем, приобщают к посильным самостоятельным исследованиям, способствуют выработке конкретных геометрических представлений, а также более тщательной обработке умений и навыков, развивает математическую инициативу, логические и чертежные навыки учащегося.

Основоположник научной геометрической системы Евклидом около 300 г. до н.э. показывал какую роль сыграли геометрические построения в формировании геометрии. «От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию», «Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать», «Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг» – эти постулаты Евклида явно указывают на основное положение конструктивных методов в геометрии древних [28].

Древнегреческие математики считали «истинно геометрическими» лишь построения, производимые лишь циркулем и линейкой, не признавая «законным» использование других средств для решения конструктивных задач. Задачи на построение циркулем и линейкой и сегодня считаются весьма интересными, и вот уже более ста лет это традиционный материал школьного курса геометрии.

Цель доклада: раскрыть теоретические основы, положения, особенности содержания и методики задач на построение в курсе математики средней школы.

Задачи доклада работы:

- проанализировать историю задач на построение в курсе математики средней школы;

- выделить функции и признаки задач на построение в курсе математики средней школы;

- охарактеризовать методы задач на построение в курсе математики средней школы;

- изучить структуру задач на построение в курсе математики средней школы;

- рассмотреть содержание и источники задач на построение в курсе математики средней школы;

- выявить эффективность метода задач на построения и его роль в курсе математики средней школы.

I. Задачи на построение в курсе математики средней школы

1. Сущность понятия задачи на построение

Решение задач на построение — шаг к развитию логического мышления.

Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины освоения учебного материала. Поэтому любой экзамен по математике, любая проверка знаний содержит в качестве основной и, пожалуй, наиболее трудной части решение задач.

За время обучения в школе каждый ученик решает огромное число задач, порядка нескольких десятков тысяч. При этом все решают одни и те же задачи. А в итоге некоторые ученики овладевают общим умением решения задач, а многие, встретившись с задачей незнакомого или малознакомого вида, теряются и не знают, как к ней подступиться [11].

У большинства учащихся весьма смутные, а порой и неверные представления о сущности решения задач, о самих задачах. Многие ученики не представляют, из чего складывается анализ задачи, не могут решить задачу на доказательство. Многие учащиеся не знают, в чём смысл решения задач на построение, зачем и когда нужно производить исследование решения и т. д. Очевидно, что на таких представлениях не могут возникнуть сознательные и прочные умения в решении задач.

Для того, чтобы научиться решать задачи, надо много поработать. Надо научиться такому подходу к задаче, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а её решение – как объект конструирования и изобретения.

Примером одних из задач в геометрии являются "Задачи на построение", с которыми зачастую ученик не может справиться на различных этапах решения.

Задачи на построение являются традиционными задачами в курсе геометрии. Разработкой методов решения этих задач математики занимаются ещё со времён Древней Греции. Уже математики школы Пифагора (VI в. до н. э.) решили довольно сложную задачу построения правильного пятиугольника. В течение многих веков математики проявляли живейший интерес к задачам на построение. Интерес к этим задачам обусловлен не только их красотой и оригинальностью методов решения, но и большой практической ценностью. Проектирование строительства, архитектура, конструирование различной техники основаны на геометрических построениях [32].

Задачи на построение развивают логическое мышление, геометрическую интуицию. План решения любой задачи на построение – цепочку основных построений, приводящих к цели – можно рассматривать как некоторый алгоритм и, следовательно, их можно использовать и в старших классах как содержательный материал курса информатики и вычислительной техники. В процессе решения задач на построение учитель может эффективно формировать элементы алгоритмической культуры школьников, систематически требуя от них четкой последовательности основных построений. Задачи на построение развивают поисковые навыки решения практических проблем, приобщают к посильным самостоятельным исследованиям, что очень важно в формировании умений и навыков умственного труда [30]. Посредством задач на построение, даже простейших из них, более глубоко осознаются теоретические сведения об основных геометрических фигурах, так как в процессе решения этих задач ученик создает наглядную модель изучаемых свойств и отношений и работает с этой моделью. Решение задач на построение развивает такие качества личности, как внимание, настойчивость и целеустремленность, инициативу, изобретательность, дисциплинированность, трудолюбие [29].

Задача на построение в планиметрии состоит в том, чтобы, исходя из заданных на плоскости геометрических фигур, применяя заранее предписанные средства (инструменты), построить новую геометрическую фигуру, находящуюся в определенных отношениях с данными фигурами. В качестве средств построения чаще всего выступают классические инструменты – циркуль и линейка.

Математики-методисты, как российские, так и зарубежные, задачам на построение уделяют немало внимания.

В частности, первая глава книги Д. Пойа “Математическое открытие” целиком посвящена геометрическим задачам на построения, и это не случайно. Пойа считает, что “место, занимаемое геометрическими построениями в программе обучения, полностью оправданно, так как они лучше всего подходят для освоения путей решения задач” [33, 34].

Не существует единого алгоритма для решения таких задач. Каждая из них по-своему уникальна, и каждая требует индивидуального подхода для решения. Именно поэтому научиться решать задачи на построение чрезвычайно трудно. Но эти задачи дают уникальный материал для индивидуального творческого поиска учащимися путей решения с помощью своей интуиции и подсознания. Цель нашего обсуждения заключается в том, чтобы на сознательном уровне перед тем, как решать задачу, и после того, как ее решение найдено, проанализировать логику задачи и логику поиска ее решения.

С точки зрения логики узловыми этапами решения задачи на построения являются два – анализ и доказательство.

В современном школьном курсе геометрии роль задач на построение заметно снизилась по сравнению с их ролью в курсах геометрии предыдущих времён.

Задачей на построение называется предложение, указывающее, по каким данным, какими инструментами, какую геометрическую фигуру требуется построить (начертить на плоскости) так, чтобы эта фигура удовлетворяла определённым условиям.

Решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки – значит свести её к совокупности пяти элементарных построений, которые заранее считаются выполнимыми [27].

Сведение решения каждой задачи к элементарным построениям делает решение громоздким. Поэтому часто решение задачи сводят к так называемым основным построениям. Выбор некоторых построений в качестве основных в известной степени произволен. Например, в качестве основных построений можно рассмотреть следующие задачи: деление данного угла пополам; построение отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение параллельной прямой, построение перпендикулярной прямой, деление отрезка в данном отношении; построение треугольника по трём сторонам, по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам; построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету [35].

Решить задачу на построение – значит найти все её решения.

Последнее определение требует некоторых разъяснений.

Фигуры, удовлетворяющие условию задачи, могут различаться как формой так и размерами, так положением на плоскости. Различия в положении на плоскости принимаются или не принимаются в расчёт в зависимости от формулировки самой задачи на построение, а именно в зависимости от того, предусматривает или не предусматривает условие задачи определённое положение искомой фигуры относительно каких-либо данных фигур. Поясним это примерами.

Рассмотрим следующую простейшую задачу: построить треугольник по трём сторонам и углу между ними. Точный смысл этой задачи состоит в следующем: построить треугольник так, чтобы две стороны его были соответственно равны двум данным отрезкам, а угол между ними был равен данному углу. Здесь искомая фигура (треугольник) связана с данными фигурами (два отрезка и угол) только соотношениями равенства, расположение же искомого треугольника относительно данных фигур безразлично. В этом случае легко построить треугольник *ABC*, удовлетворяющий условию задачи. Все треугольники, равные треугольнику *ABC*, также удовлетворяют условию поставленной задачи. Однако нет никакого смысла рассматривать эти треугольники как различные решения данной задачи, ибо они отличаются один от другого только положением на плоскости, о чем в условии задачи ничего не сказано. Будем поэтому считать, что задача имеет единственное решение [10].

Итак, если условие задачи не предусматривает определённого расположения искомой фигуры относительно данных фигур, то условимся искать только все неравные между собой фигуры, удовлетворяющие условию задачи. Можно сказать, что задачи этого рода решаются «с точностью до равенства». Это означает, что задача считается решённой, если: 1) Построено некоторое число неравных между собой фигур $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$, удовлетворяющие условиям задачи, и 2) доказано, что всякая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, равна одной из этих фигур. При этом считается, что задача имеет n различных решений [4].

Рассмотрим теперь задачу несколько иного содержания: построить треугольник так, чтобы одной его стороной служил данный отрезок *BC*, другая сторона была равна другому данному отрезку l, а угол между ними был равен данному углу α.

В этом случае условие задачи предусматривает определённое расположение искомого треугольника относительно одной из данных фигур (именно относительно отрезка *BC*). В связи с этим мы иначе смотрим на вопрос о построении всех решений этой задачи. Как видно из рисунка 5, может существовать до четырёх треугольников, удовлетворяющих условию этой задачи. Они равны между собой, но по разному расположены относительно данной фигуры *BC*. В этом случае полное решение задачи предусматривает построение всех этих треугольников. Считается, что задача имеет до четырёх различных решений, различающихся своим расположением относительно данной фигуры [3].

Итак, если условие задачи предусматривает определённое расположение искомой фигуры относительно какой-либо данной фигуры, то полное решение состоит в построении всех фигур, удовлетворяющих условию задачи (если такие фигуры существуют в конечном числе).

2. Анализ учебной литературы курса геометрии средней школы

Был предварительно проведен и анализ программы по математике курса средней школы.

Н.Я. Виленкин “Математика 5” [20]: в учебнике две главы “Натуральные числа” и “Дробные числа”, каждая содержит четыре параграфа. В нем первым из построений с помощью линейки является построение отрезка (далее уже многоугольника). А также изучается сравнение отрезков с помощью циркуля. Далее идет изучение прямой и луча. Следующие построения рассматриваются в начале второй главы в пункте окружность и круг. А именно построение окружности с помощью циркуля. В конце курса школьники учатся обращаться с чертежным треугольником (построения прямого угла).

Н.Я. Виленкин “Математика 6” [21]: в этом учебнике также две главы “Обыкновенные дроби” и “Рациональные числа”, каждая содержит четыре параграфа. В конце курса учащиеся знакомятся с перпендикулярными и параллельными прямыми и строят их с помощью чертежного треугольника и линейки.

Г.В. Дорофеев “Математика 5” [22]: в данном учебнике первым из построений с помощью линейки является построение прямой, проходящей через две данные точки, а также построение окружности с помощью циркуля. Далее следует изучение луча и сравнения отрезков с помощью циркуля. В следующей главе рассматривается понятие угла и его построение, в том числе с помощью угольника. Третья глава посвящена изучению многоугольников, в частности прямоугольников и треугольников.

Г.В. Дорофеев “Математика 6” [23]: в главе 2 ‘Прямые и окружности’ знакомит учащихся с перпендикулярными и параллельными прямыми, и их построением с помощью угольника и линейки. Далее определяются касательная к окружности, концентрические окружности, и рассматриваются варианты взаимного расположения прямой и окружности, двух прямых на плоскости. Предлагаются различные задачи на построение касательной к окружности; окружности, касающейся двух параллельных прямых; двух окружностей. Одна из глав учебника посвящена изучению симметрии: осевой и центральной. Предлагаются задачи на построение симметричных фигур, а также на нахождение кратчайшего пути. Также имеется глава, посвященная фигурам на плоскости, в частности треугольникам и параллелограммам. В ней рассматривается построение треугольника по трем сторонам и предлагаются задачи на построение различных треугольников (прямоугольных, равнобедренных, остроугольных, тупоугольных).

Проанализируем учебник «Геометрия 7-9» Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов [8].

Раздел 7 класса содержит четыре главы. Тема “Задачи на построение” изучается в конце главы 2 “Треугольники”. В этом параграфе содержатся пункты “Окружность”, “Построения циркулем и линейкой” и “Примеры задач на построение”. Основываясь на том, что учащиеся умеют с 5 и 6 класса выполнять основные построения с помощью циркуля и линейки, в теме рассматриваются задачи на построение такие как: построение отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла, перпендикулярных прямых и середины отрезка. Схема, по которой решаются задачи на построение, не вводится. Основная цель главы 2 – отработать навыки решения простейших задач на построение с помощью циркуля и линейки.

В главе 3 “Параллельные прямые” рассматривается построение параллельных прямых с помощью чертежного треугольника и линейки, а также с помощью циркуля и линейки по заданной прямой и точке (в форме задачи).

В главе 4 “Соотношения между сторонами и углами треугольника” рассматривается задача о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по трем сторонам. Данная глава содержит целый блок задач на построение для самостоятельного решения, который состоит в основном из задач на построение различных треугольников по различным элементам.

В конце 7 класса также имеется блок задач на построение, перед которым описывается схема, по которой решают задачи на построение: анализ, построение, доказательство, исследование. Приводится пример.

В разделе 8 класса содержится пять глав. В главе 5 “Четырехугольники” после изучения многоугольника, параллелограмма и трапеции вводится блок задач на построение параллелограмма и трапеции по различным элементам. Перед этим еще раз идет повторение схемы решения задач на построение. В этой же главе после изучения прямоугольника, ромба и квадрата предлагается решить задачи на их построение.

В главе 7 “Подобные треугольники” рассматриваются задача на построение треугольника, при решении которой применяется метод подобия (в данном случае треугольников), в качестве практического приложения подобия треугольников. Также приводится ряд задач на построение треугольников по данным отношениям для самостоятельного решения. Основная цель главы 7 – сформировать понятие подобных треугольников, выработать умение применять признаки подобия треугольников, сформировать аппарат решения прямоугольных треугольников.

В начале главы 8 “Окружность” в пункте “Касательная к окружности” решается задача о проведении касательной к окружности через данную точку. Говорится о том, что решение подобных задач основано на теореме (признаке касательной). Также в главе изучаются четыре замечательные точки треугольника. Задачи на построение (касательной к окружности, серединного перпендикуляра к отрезку) содержит каждый пункт главы. Основная цель главы 8 – дать учащимся систематизированные сведения об окружности и ее свойствах, вписанной и описанной окружностях.

В конце 8 класса в разделе задач повышенной трудности встречается задача на построение равнобедренной трапеции по основаниям и диагоналям. А также построения встречаются в задачах на повторение.

в) 9 класс содержит четыре главы. В главе 12 "Длина окружности и площадь круга" в §1 "Правильные многоугольники" рассматривается построение правильных многоугольников. Предлагается с помощью циркуля и линейки вписать в окружность различные правильные многоугольники. Также построения встречаются в задачах не повторение. Основная цель главы 12 – расширить и систематизировать знания учащихся об окружностях и многоугольниках.

В главе 13 "Движения" изучаются симметрии, поворот и параллельный перенос. В конце главы содержатся задачи на построение, решение которых основано на изученном материале. Основная цель главы 13 – познакомить с понятием движения на плоскости: симметриями, параллельным переносом, поворотом.

«Геометрии 7 – 9» А.В. Погорелов [6]

В 7 классе содержится пять параграфов. В §1 "Основные свойства простейших геометрических фигур" рассматривается, как построить параллельные прямые с помощью угольника и линейки. В §2 "Смежные и вертикальные углы" рассматривается, как построить перпендикулярные прямые с помощью угольника и линейки. §5 "Геометрические построения" содержит пункт "Что такое задачи на построение", где рассказывается о чертежных инструментах и о том, что значит решить задачу на построение. Схема решения не вводится. В следующих пунктах рассматриваются задачи на построение треугольника с данными сторонами; угла, равного данному; биссектрисы угла; деление отрезка пополам; построение перпендикуляра к прямой. Далее идут пункты "Геометрическое место точек", в котором вводится определение ГМТ и Теорема о ГМТ, равноудаленных от двух данных точек; а также "Метод геометрических мест”, который раскрывает сущность данного метода. В конце параграфа приводится ряд задач на построение для самостоятельного решения. В основном это задачи на построение треугольника и окружности по данным элементам и задачи на ГМТ. Основная цель §5 – решать простейшие задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

В 8 классе содержится пять параграфов. В конце §6 “Четырехугольники” содержится задача на построении четвертого пропорционального отрезка. Также содержится ряд задач на построение параллелограмма, ромба и трапеции по данным элементам. Основная цель §6 – дать учащимся систематизированные сведения о четырехугольниках и их свойствах. В §9 “Движение” изучаются геометрические преобразования: центральная и осевая симметрии, поворот, параллельный перенос. В конце параграфа приведены задачи на построение, решение которых основано на методах данных преобразований. Основная цель §9 – познакомить учащихся с примерами геометрических преобразований.

В 9 классе в §11 “Подобие фигур” изучаются геометрические преобразования: подобие и гомотетия. В конце параграфа приведены задачи на построение, решение которых основано на методах данных преобразований. Основная цель §11 – усвоить признаки подобия треугольников и отработать навыки их применения. В §13 “Многоугольники” рассматриваются построения некоторых правильных многоугольников. В конце имеется пара задач: вписать в окружность n-угольник и описать около окружности правильный n-угольник. Основная цель §13 – расширить и систематизировать сведения о многоугольниках и окружностях.

В таблице 1 приведен количественный анализ (процент заданий на построение) в учебниках:

Таблица 1

Учебники	Класс	Всего задач в учебнике	Из них на построение	Процент от общего

				числа задач
Александров А.Д. и др. “Геометрия 7-9”	7	33	8	24
	8	643	95	15
	9	556	89	16
Атанасян Л.С. и др. “Геометрия 7-9”	7	362	90	25
	8	448	64	14
	9	321	36	11
Погорелов А.В. “Геометрия 7-9”	7	218	42	20
	8	298	35	12
	9	206	10	5

Рассматривая учебники, можно отметить, что в них достаточно высок процент заданий на построение в 7 классе, причем рассматриваются стандартные и элементарные задачи на построение [5, 7, 9]. Однако к 9 классу процент геометрических заданий на построение резко падает. Задания на построение составляют базу для работы, развивающей навыки построения фигур, способствующей формированию умения читать и понимать чертеж, устанавливать связи между его частями, недостаточность этой системы обусловливает плохое развитие пространственного и логического мышления ученика, низкий уровень его графической культуры. Эти недостатки не позволяют ученику эффективно изучать те разделы математики, где самостоятельно сделанная и хорошо понятая графическая интерпретация является тем самым “лучом света в темном царстве”, которого так иногда не хватает школьнику при изучении математики.

3. История развития задач на построение

В Древней Греции слова математика и геометрия были синонимами. Любые математические задачи, будь то доказательство свойств чисел или нахождение корней уравнений, решались геометрическими способами. Естественно, в такой ситуации важную роль приобрели *задачи на построение.*

К построениям предъявлялись высокие требования точности, простоты, экономности. Самой совершенной линией на плоскости являлась окружность, а самой простой — прямая (ведь русское слово «простая» и означает «прямая», и «простить» значит «разрешить стоять прямо, не склонив головы»). Наиболее ценными считались построения, использующие только эти две линии. Поскольку прямую можно провести при помощи линейки (без делений), а окружность построить циркулем, то мы теперь говорим о задачах на построение с помощью циркуля и линейки. Циркуль позволяет не только построить окружность с указанным центром и радиусом, но отложить отрезок, равный данному, и выяснить, какой из имеющихся отрезков длиннее. С помощью линейки можно провести прямую через две данные точки. (Линейка с делениями, которой мы пользуемся, не годится для измерений длин отрезков, она дает приближенный результат — этого античные математики не могли допустить).

Методика решения задач на построение была разработана в школе Платона. Будучи философом, Платон уделял большое внимание математике. Недаром над входом в его Академию было написано: «Пусть сюда не входит тот, кто не знает геометрии» [39, 45].

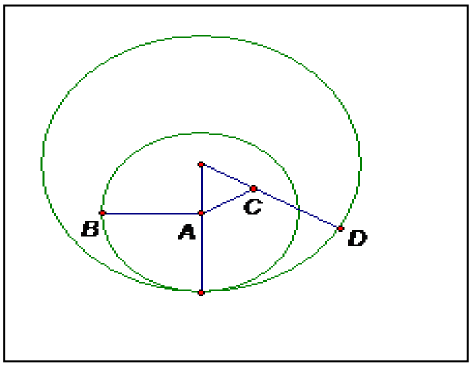
В молодости Платон много путешествовал, посетил Сицилию, Египет, Персию. Вернувшись в Афины, он основал на свои средства на окраине города философскую школу, в которую привлек самых передовых ученых своего времени. Она получила название «Академия» по роще, в которой находилась: по преданию, в этой роще жил мифический герой Академ. Платоновская Академия просуществовала более девяти веков, только в 529 г. указом византийского императора Юстиниана она была закрыта как языческая [18].

В школе Платона при решении задач на построение не разрешалось использовать никакие другие инструменты, кроме циркуля и линейки. Такое ограничение сыграло большую роль в развитии геометрии, а в дальнейшем в установлении ее связей с алгеброй.

Другими словами, циркулем и линейкой строится любой отрезок, выраженный через данные отрезки в квадратных радикалах (т. е. с помощью конечного числа четырех арифметических операций и извлечения квадратного корня).

С течением времени вырабатывались общие принципы и способы решения задач на построение. Общеизвестно, что при решении таких задач, как правило, выделяют четыре этапа: анализ, само построение, доказательство и исследование. Анализ состоит в том, что задачу предполагают решенной, строят чертеж, содержащий данные и искомые элементы фигуры, и изучают соотношения между ними. Иными словами, решение задачи начинают с конца. После того как нужные соотношения найдены, приступают к построению. Затем следует доказательство того, что проведенное построение действительно приводит к нужному результату. Завершает решение исследование, где выясняют, при каких условиях решение существует, сколько этих решений и какие частные случаи возможны. Конечно, такой детальный подход к решению задачи на построение с использованием всех четырех этапов применяется лишь в случае, когда задача довольно сложная [15].

Первые предложения Евклидовых «Начал» представляют собой решения некоторых задач на построение. Предложение 1 совсем простое: в нем дается хорошо известное построение равностороннего треугольника с данной стороной. А вот предложение 2: *от данной точки отложить прямую, равную данной прямой* (напомним, что прямыми Евклид называет отрезки). Не правда ли, эта задача выглядит несколько странно? Разве нельзя просто раскрыть циркуль на расстояние, равное длине данного отрезка, и описать окружность этим радиусом с центром в данной точке? Но оказывается, такое решение Евклид не признавал. В «Началах» циркуль разрешается использовать только для проведения окружности с данным центром, проходящей через данную точку. Если же радиус окружности задан отдельным отрезком, то сначала



нужно отложить его от центра, а потом уже чертить окружность, пользуясь построенной на ней точкой. Этому вспомогательному построению и посвящено предложение 2. Сопровождающий его чертеж из старинного издания «Начал» воспроизведен на рисунке 1.

Здесь *AB* – данный отрезок, *C* – данная точка, *CD* – построенный отрезок длины *AB*.

Задача 1. Восстановите построение Евклида по рисунку1.

Если эта задача решена правильно, получится построение, в котором точка *D* появляется после проведения шести линий (прямых и окружностей). Но есть и более экономные решения [17].

Задача 2. Даны отрезок *AB* и точка *C*. Постройте точку *D* на расстоянии *CD* = *AB* от точки *C*, проведя менее 6 линий и не пользуясь циркулем для переноса отрезков из одной точки в другую. Создайте инструмент, который по трем точкам строит окружность с центром в первой точке и радиусом, равным расстоянию между второй и третьей точками.

Стандартными считаются и более сложные построения – такие, как деление данного отрезка пополам или на данное число равных частей, деление данного угла пополам... Дальше хочется продолжить: …или на данное число равных частей (углов). Хотелось и грекам. Но они не смогли (с помощью только циркуля и линейки) разделить произвольный данный угол даже на три равные части – так возникла одна из трех классических задач на построение: задача трисекции угла (т.е. деления его на три равные части). В этом же списке стандартных построений, вошедшем во все школьные учебники, построение прямой, параллельной или перпендикулярной данной, построение суммы или разности данных отрезков и др [14].

4. Влияние задач на построение на развитие логического мышления ученика средней школы

Решение задач требует от человека хорошо развитой способности к творческой деятельности или, по крайней мере, способности и умения отыскать более или менее оптимальное в данных условиях решение. Поэтому большое значение современная наука придает изучению процесса человеческой деятельности, поискам эффективных способов управления этой деятельностью, как в сфере производства, так и в обучении [13].

«Почти всегда изучение любой человеческой деятельности — в труде или игре — можно проводить как изучение ситуаций, в которых приходится принимать решения, то есть таких ситуаций, когда один человек или группа людей сталкиваются с необходимостью выбора какого-нибудь одного из нескольких действий. Поэтому изучение человеческой деятельности можно в основном свести к изучению поведения человека в условиях производимого им выбора, то есть в условиях ситуаций, в которых нужно принимать решение», т. е. в процессе решения человеком различных задач.

Обучение учащихся геометрическим построениям преследует две цели: обучение выполнению собственно геометрических построений и обучение решению задач на построение.

Естественно, что каждому из этих вопросов в различных классах должно быть уделено различное внимание. Рассмотрим первый из них.

В VI классе основное внимание обращается на обучение учащихся выполнению простейших геометрических построений и их систематическому использованию при формировании и закреплении важнейших понятий: перпендикулярность и параллельность прямых, главнейшие линии в треугольнике, симметрия относительно прямой и т. д [25].

К концу VI класса учащиеся должны получить уже довольно прочные навыки в решении ряда конструктивных задач, включенных в программу VI класса, ценных с практической точки зрения и необходимых для дальнейшего изучения материала.

К этим построениям относятся различные приемы построения отрезка, равного данному, масштабной линейкой или циркулем и линейкой (немасштабной); действия над отрезками (в том числе деление отрезка пополам) при помощи масштабной линейки или циркуля и линейки (немасштабной); приближенное деление угла пополам циркулем; построение угла, равному данному, транспортиром или циркулем и линейкой; построение прямого угла чертежным треугольником; действия, производимые над углами малкой, транспортиром, циркулем и линейкой (немасштабной); построение параллельных и перпендикулярных прямых различными приемами [37].

Умение фактически выполнять указанные выше построения является совершенно необходимым условием для дальнейшего успешного обучения решению конструктивных задач, так как только при этом условии учащиеся, решая задачи, смогут уделить внимание содержанию и методам их решения, а не только технике выполнения самого построения.

Овладение рядом построений способствует лучшему усвоению новых понятий. Например, для усвоения таких важных понятий, как высота треугольника, симметрия относительно прямой и т.д., необходимо, чтобы учащиеся умели строить прямые углы, перпендикулярные прямые и т. д.

Правильно выполненный чертеж имеет большое значение для отыскания плана решения задач на вычисление и доказательство, и наоборот, неверно выполненный чертеж часто не позволяет «увидеть» нужные соотношения. Неверный чертеж часто направляет мысль учащихся по неверному пути [1].

В VII классе перед учителем стоят более широкие задачи по изучению и использованию геометрических построений, в том числе решению задач на построение. Продолжается обучение выполнению некоторых новых построений и проводится систематическое закрепление приобретенных в VI классе умений; как и ранее, геометрические построения используются при формировании и закреплении геометрических понятий, а также для доказательства существования некоторых геометрических фигур [2].

Новыми построениями для учащихся VII класса являются: построение центрально-симметричных фигур, деление отрезка на равные части, построение окружности по трем ее точкам, деление дуг окружности на равные часта, деление дуг и хорд окружности пополам, проведение касательной к окружности через данную точку.

Все эти построения, выполнение которых в большинстве случаев основывается на материале, изученном в VI классе, используются затем при решении конструктивных задач. Необходимо, чтобы учащиеся умели фактически выполнять их при любом взаимном положении заданных элементов.

В VII классе продолжается формирование умений учащихся выбирать различные приемы построения в зависимости от условия задачи. Например, перед ними может быть поставлен вопрос, каким способом они будут проводить через данную точку касательную к данной окружности, если:

а) точка лежит вне окружности и центр окружности неизвестен,

б) точка лежит на окружности и центр окружности неизвестен,

в) точка лежит на окружности, а центр окружности находится вне чертежа.

Построение касательных для всех этих случаев учащиеся не должны заучивать. Они должны лишь представлять, как нужно поступить в зависимости от условия задачи, какие соотношения между искомыми и данными, элементами надо использовать для построения [42].

В VIII классе число новых построений весьма ограничено - это деление отрезка в данном отношении, построение фигур, подобных данным, построение углов по заданным значениям их тригонометрических функций и построение правильных многоугольников. Основное внимание здесь уделяется закреплению ранее изученных построений и решению задач на построение.

Развитие логического мышления учащихся является одной из основных целей курса геометрии.

При изучении геометрии развитие логического мышления учащихся осуществляется в процессе формирования понятий, доказательства теорем, решения задач [38].

При изучении геометрических построений, прежде всего, приходится преодолевать трудности логического порядка. В условиях школы для преодоления этих трудностей совершенно необходимо сопровождать логические конструкции фактическими построениями при помощи определенных инструментов (линейка, чертежный треугольник, циркуль),а также изображениями, выполняемыми от руки.

Весь процесс решения задачи на построение сопровождается выполнением соответствующих чертежей («чертеж-задание», «чертеж-набросок», «чертеж-построение», «чертеж для исследования»).

Ни одни задачи не содействуют так развитию в учениках наблюдательности и правильности мышления, представляя в то же время для них и наибольшую привлекательность, как геометрические задачи на построение.

Задачи вычислительного характера в планиметрии, не требующие в большинстве своем вспомогательных построений и сложных, логических рассуждений, служат для закрепления фактического материала: формулировок теорем, свойств фигур и т.п. Чтобы развивать логическое мышление учащихся, а этим сделать их знания более систематизированными, прочными и глубокими, решаются задачи на доказательство [41].

Выводы по главе I

Задачи на построение развивают логическое мышление, геометрическую интуицию. Большое значение для логического развития учащихся имеют и задачи на построение. Наличие анализа, доказательства и исследования при решении большинства таких задач показывает, что они представляют собой богатый материал для выработки у учащихся навыков правильно мыслить и логически рассуждать. При решении задач на построение они должны создать необходимую фигуру, подвергающуюся различным изменениям в процессе решения. Вскрывая взаимосвязи между данными элементами с изменением одних элементов, изменяются и другие, и даже вся фигура [43].

Весь комплекс, состоящий из четырех стадий решения задач на построение (анализ, построение, доказательство, исследование), является хорошей школой решения и исследования проблем в области точных наук. В процессе решения таких задач развивается внимание, настойчивость, инициатива и изобретательность.

Логические трудности главным образом связаны с проведением анализа и исследования задачи.

Был предварительно проведен и анализ программы по математике курса основной школы. Выявилось, что в учебниках не достаточно высок процент заданий на построение в 7 классе, причем рассматриваются стандартные и элементарные задачи на построение [5, 7, 9]. Однако к 9 классу процент геометрических заданий на построение резко падает. Задания на построение составляют базу для работы, развивающей навыки построения фигур, способствующей формированию умения читать и понимать чертеж, устанавливать связи между его частями, недостаточность этой системы обусловливает плохое развитие пространственного и логического мышления ученика, низкий уровень его графической культуры. Эти недостатки не позволяют ученику эффективно изучать те разделы математики, где самостоятельно сделанная и хорошо понятая графическая интерпретация является тем самым “лучом света в темном царстве”, которого так иногда не хватает школьнику при изучении математики.

Умение выполнять геометрические построения является совершенно необходимым условием для дальнейшего успешного обучения решению конструктивных задач, так как только при этом условии учащиеся, решая задачи, смогут уделить внимание содержанию и методам их решения, а не только технике выполнения самого построения [17].

Развитие логического мышления учащихся является одной из основных целей курса геометрии. Поэтому необходимо больше времени уделять именно этому виду задач в геометрии.

II. Методика изучения задач на построение курса математики средней школы

1. Этапы работы над задачей на построение

Суть решения задачи на построение состоит в том, что требуется построить наперед указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры.

Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется решением этой задачи.

Найти решение задачи на построение – значит свести ее к конечному числу основных построений, то есть указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых, искомая фигура будет уже считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии [12].

Одной из основных проблем методики обучения решению задач на построение является методика введения и изучения этапов решения конструктивных задач. Еще в IV в. до н. э. древнегреческие геометры разработали общую схему решения задач на построение, которой мы пользуемся и теперь. Процесс решения задачи разбивают на 4 этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим каждый этап более подробно.

Анализ — это важный этап решения задачи, который мы понимаем как поиск способа решения задачи на построение. На этом этапе должны быть подмечены такие зависимости между данными фигурами и искомой фигурой, которые позволили бы в дальнейшем построить эту искомую фигуру.

Анализ – подготовительный, предварительный этап решения задачи на построение.

Чтобы облегчить себе поиск связей между искомой фигурой и данными фигурами, обычно оказывается выгодным иметь перед глазами вспомогательный чертеж, чертеж-набросок, изображающий данные и искомые фигуры примерно в том расположении, которое предусмотрено условием задачи. Чертеж можно выполнить от руки, на глаз – это проект чертежа, который должен образоваться, когда задача уже решена [16].

На вспомогательном чертеже следует выделить данные элементы и важнейшие искомые элементы. Практически часто удобнее начинать построение вспомогательного чертежа не с данной фигуры, а с примерного изображения исходной фигуры, пристраивая к ней данные так, чтобы они находились в отношениях, указанны в условии задачи.

Если вспомогательный чертеж не подсказывает способа построения искомой фигуры, то пытаются обнаружить какую-либо часть искомой фигуры или вообще некоторую фигуру, которая может быть построена, и которой затем можно воспользоваться для построения искомой фигуры.

Также надо учитывать следующие моменты [46]:

1) если на вспомогательном чертеже не удается непосредственно заметить необходимые для решения связи между данными и искомыми элементами, то целесообразно ввести в чертеж вспомогательные фигуры: соединить уже имеющиеся точки прямыми, отметить точки пересечения имеющихся линий, продолжить некоторые отрезки и т. д. Иногда бывает полезно проводить параллели или перпендикуляры к уже имеющимся прямым;

2) если по условию задачи дана сумма или разность отрезков или углов, то эти величины следует ввести в чертеж, то есть следует изобразить их на чертеже-наброске, если их еще нет на нем;

3) в процессе проведения анализа бывает полезно вспомнить теоремы и ранее решенные задачи, в которых встречаются зависимости между элементами, о которых говорится в условии рассматриваемой задачи [19].

Название этапа “анализ” не означает, что для отыскания решения применяется только аналитический метод, подобно тому, как и при доказательстве, которое иногда называют “синтезом”, не всегда применяется синтетический метод рассуждения. При разборе задачи, при отыскании путей ее решения анализ и синтез находятся в постоянном взаимодействии, дополняют и проверяют друг друга.

Построение – второй этап решения задач на построение состоит из двух частей:

1) перечисление в определенном порядке всех элементарных построений, которые нужно выполнить, согласно анализу, для решения задачи;

2) непосредственное выполнение этих построений на чертеже при помощи чертежных инструментов. Действительно, решить задачу с помощью тех или иных инструментов — значит указать конечную совокупность элементарных, допустимых для данных инструментов, построений, выполнение которых в определенной последовательности позволяет дать ответ на вопрос задачи [36].

Данный этап вводится при решении самой первой задачи на построение, которой обычно является задача о построении отрезка, равного данному, на данном луче с концом в начале этого луча. В беседе, сопровождающей введение этапа, необходимо отметить, в чем состоит решение любой задачи на построение и указать, что осуществление этого этапа как раз и состоит в перечислении конечного числа операций построения искомой фигуры.

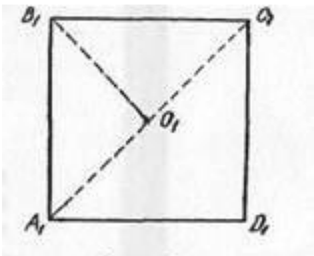


Рисунок 2

Рассмотрим решение задачи: “Построить квадрат по его диагонали”.

Анализ. Проведя диагональ A_1C_1 (рис. 2), мы видим, что построение квадрата сводится к построению равнобедренного прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ по его гипотенузе A_1C_1, который затем легко дополнить до квадрата.

Построение. Треугольник $A_1B_1C_1$ можно строить различными способами. Например:

1) Строим угол $B_1A_1C_1$, содержащий 45°, и на одной его стороне откладываем отрезок A_1C_1, и равный данной диагонали. Проведя $C_1B_1 \perp A_1B_1$,

получим треугольник $A_1B_1C_1$, который дополняем до квадрата $A_1B_1C_1D_1$, что можно сделать различными способами.

2) Проведем через середину A_1C_1 перпендикуляр $B_1O_1 \perp A_1C_1$ и отложим $B_1O_1=A_1O_1$ и соединим B_1 с A_1 и C_1; получим треугольник $A_1B_1C_1$.

3) На A_1C_1, как на диаметре, строим окружность и из точки O_1 восставляем перпендикуляр $O_1B_1 \perp A_1C_1$ до пересечения с окружностью в точке B_1. Соединив B_1 с A_1 и C_1, получим треугольник $A_1B_1C_1$. Проведя $B_1D_1 \perp A_1C_1$, мы сразу можем получить точки B_1 и D_1, как и в предыдущем случае. Очевидно, что построение треугольника $A_1B_1C_1$ возможно и другими способами [11].

Решение одной и той же задачи несколькими способами усиливает интерес учащихся к задачам на построение и сознательное отношение к решению таких задач. Если решать задачи на построение все время по заранее указанным методам, то этим самым сковывается изобретательность и инициатива учащихся в нахождении различных и оригинальных способов решения и им трудно научиться самостоятельно решать конструктивные задачи. Они применяют в первую очередь знания изучаемого материала и навыки, полученные при решении задач, предшествующих данной. Указание учителя на существование более простого способа не дает должного эффекта, так как предложенное учителем решение кажется учащимся искусственным, которого они сами не смогли бы найти.

Конечно, если это делать до того как ученики приобретут прочные навыки в отыскании решений различными способами, то результаты окажутся отрицательными. Внимание учащихся каждый раз будет распыляться между всеми способами, и они ни одного из них не усвоят основательно, чтобы применять его достаточно сознательно.

Различными способами хорошо решать задачи в конце учебного года, при повторении курса геометрии, когда учащиеся уже имеют достаточные навыки в решении задач на построение. Задачу, допускающую различные способы решения, лучше задавать на дом, чтобы они не только решили, но и нашли наиболее простое решение.

Доказательство. После того как фигура построена, необходимо установить, удовлетворяет ли она условиям задачи, то есть показать, что фигура, полученная из данных элементов определенным построением, удовлетворяет всем условиям задачи. Доказательство существенно зависит от способа построения. Одну и ту же задачу можно решать различными способами, в зависимости от намеченного при анализе плана построения, а поэтому, и доказательство в каждом случае будет свое. Доказательство представляет собой часть решения задачи, по своему логическому содержанию обратную анализу. Если в анализе устанавливается, что всякая фигура, удовлетворяющая поставленным условиям, может быть найдена таким-то и таким-то путем, то в этой, третьей части решения доказывается обратное положение. Это обратное положение в общем виде может быть сформулировано так: если некоторая фигура получена из данных элементов таким-то построением, то она действительно удовлетворяет поставленным условиям. В Приложении 3 приведено решение задачи: “Построить трапецию по четырем сторонам”.

При решении простейших задач, когда все условия задачи находят непосредственное отражение в плане построения, нет необходимости доказывать, что фигура, полученная из данных элементов таким построением, является искомой. Например: “Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними”. Здесь доказательство сводится к простой проверке, такие ли взяли стороны, как данные, и будет ли построенный угол равен данному. В подобных задачах доказательство является излишним, ибо правильность решения обеспечивается соответствием построения анализу и данным условия задачи.

Доказательство не просто зависит от анализа и построения, между ними существует взаимосвязь и взаимообусловленность. Построение проводится по плану, составленному при анализе. Таких планов можно указать несколько. Построение и доказательство являются своеобразным критерием правильности и рациональности составленного плана. Если план не осуществим имеющимися инструментами или же построение оказывается нерациональным, мы вынуждены искать новый план решения. Аналогичным образом и доказательство, и исследование влияют на анализ, предопределяя нередко выбор плана решения.

При решении задач на построение труднее найти данные, на основании которых можно доказать, что построенная фигура является искомой. Поэтому при решении конструктивных задач в классе целесообразно иногда специально выделять, что дано, и что требуется доказать [11].

Исследование. При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно еще выяснить следующие вопросы: 1) всегда ли (то есть при любом ли выборе данных) можно выполнить построение избранным способом; 2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить; 3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных? Рассмотрение всех этих вопросов и составляет содержание исследования [2].

Таким образом, исследование имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений. Нередко школьники и даже учителя проводят исследование, произвольно выбирая те или иные случаи, причем неясно, почему рассматриваются именно такие, а не какие-либо иные случаи. Остается неясным также, все ли возможные случаи рассмотрены. Практически в большинстве случаев удается достигнуть необходимой полноты исследования, если проводить это исследование по ходу построения, что является наиболее доступным и целесообразным способом. Сущность этого приема состоит в том, чтобы перебрать последовательно все шаги, из которых слагается построение, и относительно каждого шага установить, всегда ли указанное на этом шаге построение выполнимо, а если выполнимо, то однозначно ли.

В итоге таких рассуждений решается вопрос о возможности и однозначности построения искомой фигуры данным способом. Но остается еще открытым вопрос: не возникнут ли новые решения, если изменить как-либо способ построения? Иногда удается доказать, что всякое решение данной задачи совпадает с одним из уже полученных решений. Если же это не удается, то можно предположить, что задача имеет другие решения, которые могут быть найдены другими способами. В этих случаях надо тщательно проверить, нет ли каких-либо иных возможных случаев расположения данных или искомых фигур, которые не были предусмотрены ранее проведенным анализом.

2. Методические рекомендации по обучению решению задач на построение

Как и в каком месте курса геометрии следует знакомить учащихся с общей схемой решения задач на построение? Здесь возникает два различных методических вопроса [10]. Первый из них — это вопрос о том, с какого времени в преподавании геометрии при решении задач должны фактически производиться анализ, построение, доказательство, исследование? Второй вопрос, отличный от первого, — это вопрос, когда учащийся должен быть ознакомлен с логической схемой решения задачи.

Обращаясь к первому вопросу, заметим, что первым по времени вводимым элементом лучше выбрать построение в смысле перечисления и описания тех или иных операций. Здесь имеется в виду самое описание процесса употребления инструмента (“прикладываем два острия ножек циркуля к точкам *M* и *N*, затем, не изменяя расстояния между остриями, помещаем одно из них в точку *O*” и т. п.). На более высокой ступени отдельные операции просто называются (“описываем из точки *O* окружность радиусом *MN*” или “опускаем из точки *C* перпендикуляр на прямую *AB*”). Наконец, последней ступенью можно было бы считать ту, когда в качестве элементов построения могут называться и довольно сложные по своему выполнению, но хорошо известные учащимся задачи (“строим треугольник по гипотенузе и катету”, “проводим из точки *M* касательную к окружности” и т. п.).

Вторым моментом по времени появления в школьном курсе лучше выбрать исследование задачи. Первый элемент исследования появляется при решении задачи о построении треугольника по трем сторонам, в виде вопроса о том, можно ля выбрать все три стороны произвольно. К этому должно скоро прибавиться знакомство с возможностью существования нескольких решений одной задачи. Этому моменту нужно придавать весьма большую принципиальную значимость. Дело в том, что слова “найти точку” обозначают требование “найти все точки, которые...”. Аналогично “решить уравнение” значит “найти все числа, которые удовлетворяют уравнению” (а не просто “какое-либо число, которое...”). “Построить окружность” – это “построить, все окружности, которые...” и т. д.

Задачи на геометрические построения с двумя решениями (или более) – первый случай, когда учащийся встречается с такого рода выражениями в математике, и чрезвычайно важно, чтобы учащийся привыкал к ним с самого начала, с 7-8 класса. Иначе совершенно неизбежно возникновение в дальнейшем вопросов такого типа, как “зачем при извлечении корня брать оба знака”. Сам термин “исследование” должен появиться на много раньше, чем, скажем, термин “анализ”.

Третьим моментом, появляющимся, примерно, в одно время с элементами исследования, является доказательство правильности выполнения построения. Уже такие задачи в 7 классе как построение угла, равного данному, построение перпендикуляров с помощью циркуля и линейки и т. д. ставят на очередь вопрос о том, будет ли построенный угол действительно равен данному, будет ли построенная прямая перпендикулярна к данной? Однако и на этой стадии работы и на последующих нет большой необходимости (только для соблюдения формального однообразия изложения) требовать проведения доказательства в тех задачах, где правильность построения усматривается непосредственно. Некоторые, даже сравнительно сложные, задачи на построение, могут, как кажется, оставляться без особого доказательства. Например, задача, решаемая методом геометрических мест: построить треугольник по основанию, противолежащему углу и медиане, проведенной к основанию.

Наконец, последним по времени элементом решения, на котором фиксируется внимание учащихся, является анализ. Началом этого вида работы следует считать обращение к ученикам, “придумавшим” то или иное решение задачи, с вопросом: “А как ты это решение нашел?”. Потом постепенно надо подвести учащихся к мысли о том, чтобы фиксировать свое внимание на самом процессе отыскания метода решения, этот процесс и получает название анализа.

Из выше сказанного следует, что в деле введения понятий анализа, построения, доказательства и исследования следует соблюдать с одной стороны, постепенность, а с другой стороны, – настойчивость в смысле многократного систематического обращения к одним и тем же вопросам.

Перейдем теперь ко второму вопросу – о введении в курсе геометрии схемы деления решения задач на построение на четыре части. Несомненно, что изучение этого вопроса на том месте, на котором он поставлен в учебниках, следует считать несвоевременным и не достигающим цели. Тем не менее, схема решения должна быть сообщена учащимся, но лишь значительно позднее. В течение учебного года, с начала систематическою курса геометрии в 7 классе до середины курса 8 класса, или даже несколько дольше, должна идти та систематическая, иногда даже незаметная для учащихся работа учителя по ознакомлению учеников с элементами общей схемы решения, о которой говорилось выше. Лишь в 8 классе учитель на примере специально подобранной задачи полностью излагает учащимся всю схему решения. Задачу следует, конечно, подобрать так, чтобы она допускала один наиболее естественный ход решения (при анализе задачи мысль учащихся должна легко пойти по вполне определенному пути), чтобы она требовала исследования, и в то же время, чтобы это исследование не было слишком сложным. Вместе с тем задача не должна быть слишком простой, так как в этом случае способ решения может оказаться очевидным для учащихся, и тогда анализ задачи покажется им чем-то искусственным. Наиболее подходящими для этой цели являются задачи, решаемые методом геометрических мест. Хорошим примером для иллюстрации общей схемы решения задач на построение является задача: “Построить треугольник по двум сторонам и острому углу, лежащему против одной из них”.

Сделав чертеж произвольного треугольника, учащиеся составляют план построения и при соответствующем выборе данных получают два решения. Они видят необходимость доказательства (проверки, какой из полученных треугольников является искомым), а также и необходимость исследования (всегда ли получим два решения?). Здесь естественно выделяются все этапы и очевидна их целесообразность. Если учащиеся хорошо владеют основными построениями, больших затруднений в оформлении решений они не испытывают.

Эта задача на построение является хорошим примером, показывающим связь между числом решений задачи на построение треугольника по определенным данным и признаками равенства треугольников.

При решении задач на построение параллелограммов хорошим примером для повторения общей схемы будет задача: “Построить параллелограмм по стороне и двум диагоналям”.

После того как схема решения задачи на построение объяснена учащимся, этой схемы следует придерживаться при решении всех дальнейших задач на построение.

Тем не менее, необязательно все задачи решать, строго придерживаясь схемы с подробным описанием всех этапов. Ученики проводят анализ лишь тогда, когда решение задачи не очевидно, доказательство – когда в нем есть необходимость.

Усвоение учащимися общей схемы имеет большое значение не только для решения задач на построение. С методической точки зрения и при решении арифметических задач, и при решении задач на составление уравнений мы пользуемся теми же четырьмя этапами, что и при решении задач на построение.

Каждая задача на построение включает в себя требование построить геометрическую фигуру, удовлетворяющую определенным условиям, которые в большинстве своем задаются размерами или положением некоторых геометрических образов. Условия задач формулируются в самом общем виде, а поэтому исходные данные являются как бы параметрами, принимающими всевозможные допустимые значения. Необходимо учить школьников видеть эти допустимые значения.

Решение задачи на построение считается законченным, если указаны необходимые и достаточные условия, при которых найденное решение является ответом на задачу. Значит, мы при всяком выборе данных должны устанавливать: имеет ли задача решение и если имеет, то сколько. Например: “Построить окружность, проходящую через три данные различные точки”. Если данные точки не лежат на одной прямой, то задача имеет решение и притом только одно; если же точки лежат на одной прямой, то задача решения не имеет.

Переходим теперь к одному из самых существенных, в методическом отношении, вопросов исследования задачи на построение. Как установить и перечислить все те случаи, которые имеют существенное значение для решения данной задачи? Известно, что очень часто учащиеся, решающие ту или иную задачу, особенно на первых порах, пытаются исследовать ее, исходя из вопроса: “А что будет, если…”, придумывая те или иные “если” более или менее произвольно. Необходимо приучать учащихся вести исследование по самому ходу построения. Желая исследовать задачу, надо в последовательном порядке перебрать еще раз те операции, из которых слагается построение, и для каждой из этих операций определить, всегда ли она возможна, какое число точек, отрезков и т. д. эта операция может давать. Таким путем удается сравнительно легко научиться исследованию задачи.

Исследование является составной частью решения. Решение задачи на построение можно считать законченным, если узнаем, сколько искомых фигур получим при определенных условиях, и, в частности, указано, когда получим искомый геометрический образ. Но исследование в задачах на построение, как и исследование при решении других задач по математике, имеет и общеобразовательное значение.

В процессе исследования учащиеся упражняются в практическом применении диалектического метода мышления. Они видят, что изменение данных задачи вызывает изменение искомой фигуры.

Для правильного проведения исследования нужно обладать хорошо развитым логическим мышлением. Значит, с другой стороны, исследование задач на построение является хорошим материалом для развития логического мышления учащихся.

Несмотря на необходимость и целесообразность исследования при решении задач на построение, этому этапу и в школе, и в методической литературе уделяется недостаточно внимания. Большое внимание уделяется обычно отысканию решения – анализу. Анализ – основной этап при решении задач на построение: не найдя решения, нельзя провести ни построения, ни доказательства, ни исследования. Но по трудности выполнения исследование является не менее сложным этапом. Наибольшее количество ошибок допускается именно при исследовании.

Значит, **у**своение учащимися общей схемы решения задач на построение имеет большое значение. Анализ, построение, доказательство и исследование точно соответствуют этапам любого логического рассуждения. При введении данных понятий следует соблюдать с одной стороны, постепенность, а с другой стороны, – настойчивость в смысле многократного систематического обращения к одним и тем же вопросам.

3. Методы решения задач на построение

К основным методам решения задач на построение, изучаемых в основной школе, относятся: метод геометрических мест; методы геометрических преобразований; метод центральной симметрии; метод осевой симметрии; метод параллельного переноса; метод поворота; метод подобия; алгебраический метод.

Математическая сущность метода геометрических мест весьма проста. Она состоит в том, что искомая точка определяется как точка пересечения некоторых двух геометрических мест; при этом те *условия задачи, которые определяют положение искомой точки, расчленяются мысленно на два условия, и каждое из них дает некоторое геометрическое место, построение которого оказывается возможным (иногда одно из этих геометрических мест заменяется непосредственно данной прямой или окружностью)* [18].

Основа данного метода – понятие геометрического места точек. Геометрическим местом точек (ГМТ) пространства, обладающих данным свойством, называется множество всех точек пространства, каждая из которых обладает этим свойством.

Каждая задача, в которой требуется найти ГМТ по его характеристическому свойству, предполагает требование описать это ГМТ наглядно через известные элементарные фигуры. Решение задачи на отыскание ГМТ неизбежно приводит к доказательству двух утверждений – прямого и ему противоположного; необходимо доказать, что: 1) каждая точка предполагаемого (искомого) ГМТ обладает заданным свойством; 2) любая точка, не принадлежащая этой фигуре, заданным свойством не обладает.

Список следующих ГМТ:

а) множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом (частный случай – множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок идеен под прямым углом);

б) множество всех точек плоскости, для каждой из которых разность квадратов расстояний до двух данных точек постоянна, равна квадрату данного отрезка;

в) множество вех точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек постоянно (окружность Аполлония).

Рассматривать эти ГМТ целесообразно только в классах с углубленным изучением математики, а также на внеклассных занятиях по математике [33].

Сущность метода геометрических мест заключается в следующем:

а) задача сводится к построению некоторой точки;

б) выясняется, какими свойствами обладает данная точка;

в) рассматривается одно из свойств, строится множество всех точек, обладающих этим свойством;

г) берется следующее свойство и так далее;

д) поскольку искомая точка должна обладать всеми этими свойствами, то она должна принадлежать каждому из построенных множеств, то есть принадлежит пересечению этих множеств.

Методы геометрических преобразований. Методы этой группы имеют достаточно много общего. Каждый изучается, как правило, при рассмотрении соответствующего преобразования, при этом решаемые задачи служат для закрепления и более глубокого усвоения изучаемого понятия. Для повышения эффективности обучения необходимо, чтобы учащиеся умели выполнять построение образов фигур при этом преобразовании, так как использование образа искомой фигуры при построении есть основа каждого из этих методов, их основная идея и суть.

Если искомую фигуру сразу построить затруднительно, то ее преобразуют в какую-нибудь другую фигуру, построение которой можно сделать легче или непосредственно.

При изучении этих методов целесообразно выделить наиболее характерные признаки с тем, чтобы в будущем, анализируя задачу, ученик мог выбрать соответствующий метод.

Действующая программа по геометрии не предполагает использовать идею геометрических преобразований в качестве руководящей идеи школьного курса геометрии, хотя использование геометрических преобразований при решении задач на построение имеет большое методическое значение [25].

Метод центральной симметрии. Симметрией относительно точки O (центральной симметрией) Z_0 пространства называется преобразование пространства, которое точку O отображает на себя, а любую другую точку M отображает на такую точку M_1, что точка O является серединой отрезка MM_1.

Данный метод применим к тем задачам, *в условии которых в той или иной форме указана точка, являющаяся центром симметрии искомой или вспомогательной фигуры*.

Рассмотрим задачу: "Через данную точку A провести прямую так, чтобы ее отрезок с концами на данных прямой и окружности делился точкой пополам".

Решение. Пусть m и α — данные прямая и окружность, CD —искомый отрезок, $C \in m$, $D \in \alpha$ (рис. 3). Тогда $Z_A(C) = D$. Если $Z_A(m) = m_1$, то $D \in m_1$ и, следовательно, $D \in \alpha \cap m_1$. Отсюда вытекает такое построение: строим образ m_1 прямой m при симметрии Z_A, точки D и E пересечения прямой m_1 с данной окружностью α определяют вместе с точкой A искомые прямые DA и EA [20].

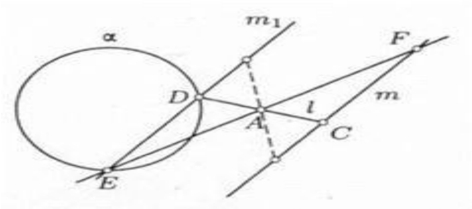


Рисунок 3

Метод осевой симметрии. Симметрией пространства относительно данной прямой l (осевой симметрией) S_l называется преобразование, которое каждую точку прямой l отображает на себя, а любую другую точку M пространства отображает на такую точку M_1, что прямая l служит серединным перпендикуляром к отрезку MM_1. Прямая l называется осью симметрии [25].

Трудно указать общие признаки задач, решаемых методом осевой симметрии. В более сложных задачах метод осевой симметрии, нередко спрямляющий ломаные линии в прямые, может быть применим, *если в условиях содержится сумма или разность частей некоторой ломаной линии*. Можно ограничится указанием, что метод осевой симметрии применим для задач, *в условии которых указана прямая, являющаяся осью симметрии части элементов фигуры*. Такую прямую легко установить по свойствам фигур. Применение осевой симметрии целесообразно для задач, которые легко решаются, *если часть данных расположена по одну сторону некоторой прямой, а остальные – по другую*.

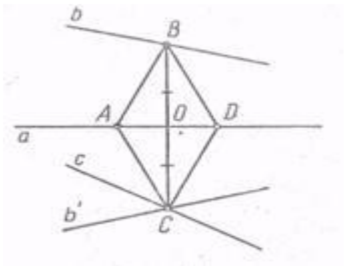


Рисунок 4

Рассмотрим задачу: “Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку r и лежала на данной прямой а, а остальные две вершины ромба лежали соответственно на данных прямых b и c”.

Анализ. Пусть (рис.4) $ABDC$ — искомый ромб, $AD = r$. Замечаем, что задача о построении ромба сводится к построению одной какой-либо из его вершин, например вершины C. По свойствам ромба точки B и C симметричны относительно прямой a. Поэтому при осевой симметрии относительно прямой a точка B преобразуется в точку C, а, следовательно, прямая b — в некоторую прямую b', проходящую через точку C. Таким образом, точка C может быть построена как точка пересечения прямых c и b', из которых одна дана, а другая легко строится [37].

Построение. Строим последовательно: прямую b', симметричную с прямой b относительно прямой a; точку C, общую для прямых c и b'; прямую BC; точку $O \equiv BC \times a$; точки A и D на прямой a, отстоящие от точки O на расстоянии $\frac{r}{2}$; $ABCD$ — искомый ромб.

Доказательство ввиду его простоты опустим.

Исследование. Возможны следующие случаи: 1) $c \parallel b'$, решений нет; 2) $c \equiv b'$, решений бесконечно много; 3) прямые c и b' пересекаются вне прямой a, одно решение; 4) прямые c и b' пересекаются на прямой a, решений нет [2].

Метод параллельного переноса. Параллельным переносом на вектор $\bar{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overline{MM}_1$ равен вектору $\bar{a}$.

Методом параллельного переноса решают задачи, при анализе которых трудно найти зависимость между данными элементами, позволяющую построить искомую фигуру (данные элементы удалены друг от друга); но *если мы какую-нибудь часть или всю фигуру перенесем параллельно в некотором направлении на определенное расстояние, то получим вспомогательную фигуру, которую легко можно построить.* Направление и величина переноса определяются так, чтобы во вспомогательную фигуру вошло большее число данных [34].

Рассмотрим задачу: “Построить выпуклый четырехугольник, зная три его угла и две противоположные стороны”.

Подробнее: даны два отрезка a и b и три угла α, β, δ. Требуется построить четырехугольник $ABCD$ так, чтобы $\angle A = \alpha,\ \angle B = \beta,\ \angle D = \delta,\ AD = a,\ CB = b$. Предполагается, что $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$, $0° < \delta < 180°$.

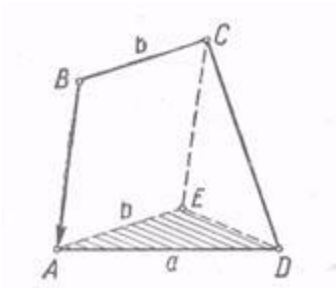


Рисунок 5

Анализ. Допустим, что $ABCD$ (рис. 5) — искомый четырехугольник. Перенесем сторону BC на вектор $\overline{BA}$, и пусть отрезок BC займет после переноса положение AE. Тогда в ΔAED известны: $AD = a$, $AE = b$, $\angle DAE = \angle BAD - \angle BAE = = \angle A - (180° - \angle B) = \alpha + \beta - 180°$. По этим данным ΔAED может быть построен.

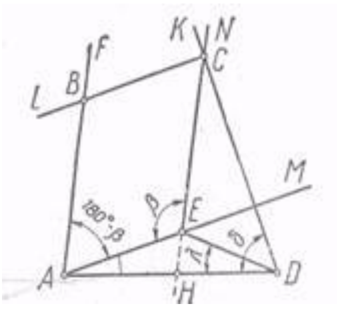


Рисунок 6

Построение. 1) На произвольной прямой строим отрезок $AD = a$ (рис. 6); 2) Через точку A проводим луч AM под углом $\alpha + \beta - 180°$ к лучу AD; 3) Откладываем на луче AM отрезок $AE = b$; 4) Строим луч EN, образующий с EA угол β и расположенный с точкой D по разные стороны от прямой AM; 5) Строим луч DK так, чтобы $\angle ADK$ был равен δ и чтобы луч DK располагался по ту же сторону прямой DE, что и луч EN; 6) Отмечаем точку C пересечения лучей EN и DK — третью вершину четырехугольника; 7) Четвертая вершина B получается в пересечении прямой AF, параллельной CE, с прямой CL, параллельной AE.

Доказательство. $\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = (180° - \beta) + (\alpha + \beta - 180°) = \alpha$. $\angle ABC = \angle CEA$, как углы, стороны которых соответственно параллельны и противоположно направлены. $\angle CEA = \beta$ по построению. $\angle ADC = \delta$ по построению. Отрезок $AD = a$ по построению. $BC = AE$, как отрезки параллельных между параллельными. Но $AE = b$, а значит, и $BC = b$ [2].

Метод поворота. Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM = OM_1$ и угол $MOM_1 = \alpha$.

Данный метод применяется к тем задачам, где *либо части фигур сближаются в положение, удобное для построения, либо при заданных явно или косвенно центре и угле поворота требуется отыскать две соответственные точки, лежащие на данных или искомых фигурах*.

Рассмотрим задачу: "Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах квадрата. Кроме того, остался столб в центре квадрата. Требуется восстановить границу участка".

Анализ. Пусть $ABCD$ — искомый квадрат, O — его центр, M и N— данные точки соответственно на сторонах AB и CD (рис. 7). Если повернуть квадрат на 180° около его центра O, то он преобразуется сам в себя. Точка M займет некоторое положение M' на стороне CD, а точка N — некоторое положение N' на стороне AB. После этого нетрудно уже построить прямые AB и CD и восстановить искомый квадрат.

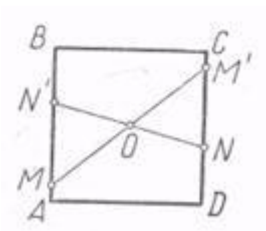


Рисунок 7

Построение. 1) Строим точку M', симметричную M относительно 0, и точку N', симметричную N относительно O.

2) Строим прямые MN' и NM'. 3) Повернем построенные прямые около точки O на 90°. Четыре построенные прямые ограничивают искомый квадрат.

Доказательство опускаем.

Исследование. По смыслу задачи невозможен случай, когда точки M и N располагаются с точкой O на одной прямой, но не симметричны относительно O. Если точки M и N симметричны относительно O, то задача становится неопределенной. В остальных случаях задача имеет единственное решение [20].

Метод подобия. Метод подобия состоит в том, что сначала строится некоторая фигура, подобная искомой, но удовлетворяющая не всем поставленным в задаче условиям. Затем построенную вспомогательную фигуру заменяем фигурой, ей подобной и удовлетворяющей уже всем требуемым условиям [18].

Задача решается методом подобия, если *ее условие можно разделить на две части, одна из которых определяет форму фигуры с точностью до подобия, а вторая – размеры фигуры*. При решении задач в классе или разборе задач из домашнего задания на этот метод следует задавать учащимся вопросы: Что (какая часть) в условии задачи определяет фигуру с точностью до подобия? Что определяет размеры искомой фигуры?

Алгебраический метод. Алгебраический метод решения задач на построении – один из важнейших методов теории конструктивных задач. Именно с помощью этого метода решаются вопросы, связанные с разрешимостью задач тем или иным набором инструментов.

Метод прекрасно демонстрирует тесную взаимосвязь алгебры и геометрии. Но, к сожалению, в школьном курсе геометрии алгебраическому методу практически не уделяется внимания, хотя с методической точки зрения изучение этого метода не представляет особых сложностей.

Суть метода состоит в следующем:

а) задача сводится к построению некоторого отрезка;

б) используя известные геометрические соотношения между искомыми и данными, составляют уравнение (систему уравнений), связывающее искомые и данные;

в) решая уравнение или систему уравнений, выражают формулой длину искомого отрезка через длины данных;

г) по формуле строится искомый отрезок (если это возможно);

д) с помощью найденного отрезка строится искомая фигура.

Подготовительную работу составляет изучение основных формул и способов построения, где также отрабатываются некоторые элементы схемы решения задач алгебраическим методом, и усваивается сама идея такого подхода к решению задач на построение.

В школьном курсе геометрии обычно рассматривают построения циркулем и линейкой отрезков, заданных следующими некоторыми простейшими формулами [2]:

1) $x = a + b$ (рис. 8).

2) $x = a — b (a > b)$ (рис. 9).

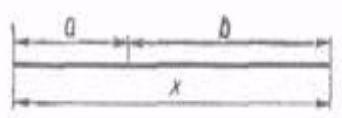


Рисунок 8

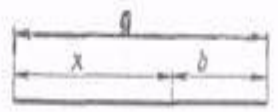


Рисунок 9

3) $x = na$, где n — натуральное число. Сводится к построению 1). На рис. 10 построен отрезок x, такой, что $x = 6a$.

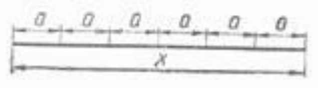


Рисунок 10

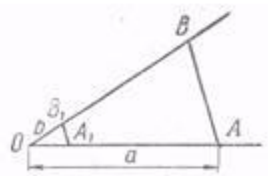


Рисунок 11

4) $x = \frac{a}{n}$.

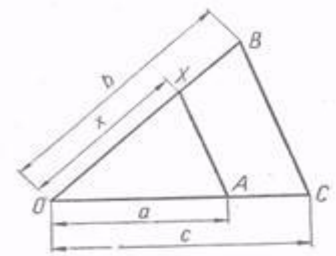
Строим луч, выходящий из какого-либо конца О данного отрезка а под произвольным углом к нему. Откладываем на этом луче n раз произвольный отрезок b, так что OB = nb (см. рис. 11). Соединяем точку B со вторым концом A отрезка a. Через точку B_1, определяемую условием $0B_1 = b$, проводим прямую, параллельную AB, и отмечаем точку A_1, в которой она пересечет отрезок a.

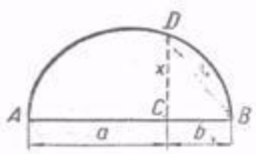
5) $x = \frac{n}{m}a$ (n и m — данные натуральные числа).

Разделим отрезок a на m равных частей и увеличим полученный отрезок в n раз.

6) $x = \frac{ab}{c}$ (построение отрезка, четвертого пропорционального трем данным отрезкам).

Запишем условие в виде пропорции $c : a = b : x$. Пусть (рис. 12) $OA = a$, $OC = c$, так что члены одного из отношений отложены на одном луче, исходящем из точки O. На другом луче, исходящем из той же точки, откладываем известный член другого отношения $OB = b$. Через точку A проводим прямую, параллельную BC, и отмечаем точку X ее пересечения с прямой OB. Отрезок OX искомый, то есть $OX = x$.





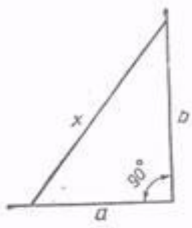


Рисунок 12 **Рисунок 13** **Рисунок 14**

7) $x = \frac{a^2}{c}$.

Можно воспользоваться построением 6), полагая $b = a$.

8) $x = \sqrt{ab}$ (построение среднего пропорционального двух данных отрезков).

Строим отрезки $AC = a$, $BC = b$, так что $AB = a + b$. На AB как на диаметре строим полуокружность (см. рис. 13). В точке C восставим перпендикуляр к AB и отметим точку D его пересечения с окружностью. Тогда $x = CD$.

9) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ Отрезок x строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b (см. рис. 14).

10) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$. Отрезок x строится как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b.

К рассмотренным построениям можно свести построение отрезков, заданных более сложными формулами.

В пункте 1 рассмотрены основные проблемы методики обучения решению задач на построение. Выявилось, что одной из основных проблем методики обучения решению задач на построение является методика введения и изучения этапов решения конструктивных задач. Еще в IV в. до н. э. древнегреческие геометры разработали общую схему решения задач на построение, которой мы пользуемся и теперь. Процесс решения задачи разбивают на 4 этапа: анализ, построение, доказательство и исследование.

В пункте 2 даны общие методические рекомендации по выполнению всех этапов решения задач на построение. Выявилось, что **у**своение учащимися общей схемы решения задач на построение имеет большое значение. Анализ, построение, доказательство и исследование точно соответствуют этапам любого логического рассуждения. При введении данных понятий следует соблюдать с одной стороны, постепенность, а с другой стороны, – настойчивость в смысле многократного систематического обращения к одним и тем же вопросам.

В пункте 3 описаны основные методы решения задач на построение. При использовании описанных методов необходимо обращать внимание в том числе и на развитие инициативы учащихся, привитие им вкуса и навыков к решению конструктивных задач.

Было бы неправильно думать, что методы решения задач на построение могут служить основой для классификации самих задач. Существенным, а не случайным следует признавать то обстоятельство, что целый ряд задач на построение может одинаково успешно решаться различными методами. С другой стороны, существуют задачи, которые решаются просто комбинацией основных построений без явного применения какого-либо метода.

С методической точки зрения наиболее приемлемым является применение при обучении решению задач на построение следующего принципа. Необходимо осуществлять последовательный подбор задач в соответствии с целями курса геометрии и постепенное ознакомление учащихся с методами решения задач на построение.

В свою очередь, необходимо ознакомить учащихся с самими методами и научить определять, каким из них можно решить предложенную задачу. Для этого, прежде всего, учащихся необходимо научить выделять наиболее характерные признаки задач, решаемых тем или иным методом. Эти признаки определяются самим содержанием метода.

Рассмотрены типичные задачи на построение в курсе геометрии основной школы. Даны общие методические рекомендации по поэтапной работе над такими задачами.

Выполнен анализ учебных программ, учебной и учебно-методической литературы по геометрии, в ходе которого найдены сходства и различия по данной теме. Рассматривая учебники, можно отметить, что в них достаточно высок процент заданий на построение в 7 классе, причем рассматриваются стандартные и элементарные задачи на построение. Однако к 9 классу процент геометрических заданий на построение резко падает. Так как задания на построение составляют базу для работы, развивающей навыки построения фигур, способствующей формированию умения читать и понимать чертеж, устанавливать связи между его частями, то недостаточность этой системы обусловливает плохое развитие пространственного и логического мышления ученика, низкий уровень его графической культуры. Эти недостатки не позволяют ученику эффективно изучать многие разделы математики.

Рассмотрено понятие логического мышления, сделан анализ психолого-педагогический литературы по теме исследования, показаны возможности развития логического мышления учеников при решении задач на построение.

Рассмотрены основные этапы решения задач на построение: анализ, построение, доказательство, исследование, которые точно соответствуют этапам любого логического рассуждения, каждый из которых является важным и требует должного внимания при решении задач.

Разработаны методические рекомендации по обучению решения задач на построение.

Рассмотрены основные методы решения задач на построение. Отметим, что необходимо знакомить учащихся с самими методами и учить определять, каким из них можно решить предложенную задачу.

Кроме того, отметим, что:

1) необходимо уделять больше внимания изучению задач на построение, так как при грамотном использовании они являются мощным средством развития логического мышления учащихся;

2) геометрические задачи на построение не нужно рассматривать как что-то отдельное, независимое от остального курса геометрии. Процессы обучения решению задач и изучение геометрии неразрывно связаны. Причем связь эта должна быть двусторонней, то есть необходимо не только обучать решению задач на построение, используя ранее полученные знания, но и, наоборот, использовать конструктивные задачи при изучении геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение с решениями / И.И.Александров. – М.: Учпедгиз, 1954. – 134 с.

2. Аргунов Б.И. Элементарная геометрия: учеб. пособие для пед. ин-тов / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – М.: Просвещение, 2007. – 168 с.

3. Белошистая А.В. Задачи на построение в школьном курсе геометрии / А. В. Белошистая // Математика в школе. – 2007. – №9. – С. 47-50.

4. Волович М.Б. Наука обучать / Технология преподавания математики. – М.: LINKA-PRESS, 2008. - 280 с.

5. Геометрия: доп. главы к шк. учеб.8 кл.: учеб. пособие для учащихся шк.и классов с углубл. изуч. математики / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Д. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2009. – 115 с.

6. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2004. – 297 с.

7. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. сред. шк. / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2010. – 367 с.

8. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. сред. шк / Л. С. Атанасян. – М.: Просвещение, 2009. – 298 с.

9. Геометрия: Планиметрия: 7-9 кл.: учебник и задачник / А. П. Кисилев, Н.А. Рыбкин. – М.: Дрофа, 2010. – 398 с.

10. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 2004. – 224 с.

11. Далингер В.А. Обучение учащихся доказательству теорем: Учеб. Пособие. – Омск: СГПИ-НГПИ, 2009. – 127 с.

12. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: формирование приёмов учебной деятельности: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2007. – 128 с.

13. Изучение личности школьника / под. ред. Л.И. Белозеровой. – Киров, Информационный центр, 2008. – 214 с.

14. Коновалова, В.С. Решение задач на построение в курсе геометрии как средство развития логического мышления / В.С. Коновалова, З.В. Шилова // Познание процессов обучения физике: сборник статей. Вып.9. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2008. – С. 59-69.

15. Кучугурова Н.Д. Опорные конспекты и творческие задания по курсу общей методики преподавания математики: Методические рекомендации. – Ставрополь: СГПИ, 2004. – 44 с.

16. Кучугурова Н.Д. Опорные конспекты и творческие задания по курсу частной методики преподавания математики: Методические рекомендации. – Ставрополь.: СГПУ, 2009. – 70 с.

17. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей пед. ин-тов / Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 2007.- 223 с.

18. Мазаник, А.А. Задачи на построение по геометрии в восьмилетней школе. Пособие для учителей / А.А.Мазаник. – Минск: Народная газета, 1967.

19. Мальцева Д.М. Опорные сигналы по педагогике: Методические советы. – Донецк, 2011. – 223 с.

20. Математика: учеб. для 5 кл. общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – М.: Сайтком, 2010. – 398 с.

21. Математика: учеб. для 6 кл. общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – М.: Сайтком, 2010. – 289 с.

22. Математика: учеб. для 5 кл. общеобразовательных учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. – М.: Просвещение, 2009. – 312 с.

23. Математика: учеб. для 6 кл. общеобразовательных учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. – М.: Дрофа, 2009. – 276 с.

24. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов пед. ин-тов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.И. Санинский, Г.И. Луканкин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

25. Методика преподавания математики в средней школе / Общая методика / Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

26. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физико-математическим специальностям / Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 2008. – 416 с.

27. Мисюркеев, И.В. Геометрические построения. Пособие для учителей / И.В.Мисюркеев. – М: Учпедгиз, 1950.

28. Общая психология: учеб. для студентов пед. ин-тов / под ред. А. В. Петровского. – М.: Просвещение, 2006.

29. Перепелкин, Д.И. Геометрические построения в средней школе / Д.И. Перепелкин. – М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР,1947.

30. Планирование обязательных результатов обучения математике / Сост. В.В. Фирсов. – М.: Просвещение, 2009. – 237 с.

31. Платонов, К.К. Краткий словарь системы психологических понятий / К.К. Платонов. – М.: Высш. шк., 2007.

32. Повышение эффективности обучения математике в школе / Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 2007. – 237 с.

33. Пойа Д. Математика а правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 462 с.

34. Пойа Д. Математические открытие. – М.: Наука, 1970. – 452 с.

35. Понарин, Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т.1: Планиметрия, преобразования плоскости / Я.П.Понарин. – М.: МЦНМО, 2004.

36. Понарин, Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т.2: Стереометрия, преобразования пространства / Я.П.Понарин – М.: МЦНМО, 2006.

37. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1 / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991.

38. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии. Ч.2 / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1991.

39. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе. – Минск: Высшая школа, 2006. – 267 с.

40. Рубинштейн, С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2008.

41. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г.И. Саранцев. – М.: ВЛАДОС, 2009. – 76 с.

42. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. – М.: Просвещение, 2005. – 83 с.

43. Тихомиров, О.К. Психология мышления / О.К. Тихомиров. – М.: Академия, 2002. – 137 с.

44. Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1989.

45. Шарыгин, И.Ф. Задачи по геометрии (Планиметрия) / И.Ф. Шарыгин. – М.: Наука, 1986.

46. Шиянов Е.Н., Котова И. Б. Введение в педагогику. Методические рекомендации. – Ростов-на-Дону, 2009. – 43 с.